5 SYSTEM

Genaues Inhaltsverzeichnis

In diesem Kapitel 5: „System“ werden *Übersichten*, *Tabellen*, *Listen*, *Diagramme* u. ä. aufgeführt.

Manche davon finden sich bereits (modifiziert) im Text, die meisten sind aber neu.
Während sich im Text die Darstellung meist auf wenige Relatoren konzentriert, vor allem auf die *Implikation*, werden hier oft *sämtliche* 14 (bzw. 16) Relatoren berücksichtigt.

Entsprechend der Aufteilung im Text wird auch dieser systematische Teil unterteilt in:

- synthetische Relationen
- analytische Relationen
- Meta-Logik synthetischer Relationen
- Meta-Logik analytischer Relationen

Natürlich ließe sich solche Übersichten fast unbegrenzt erweitern. Ich habe in meinen Unterlagen viel mehr Tabellen, Listen usw. erarbeitet, als ich hier einbringen kann. Die hier präsentierten Darstellungen sind aber besonders wichtig.

Dieses letzte Kapitel, Kapitel 5 „System“, zählt in seinen Unter-Kapiteln nicht von 1 bis 5, sondern von 0 bis 4, also: 5-0, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4. Dies mag zunächst unsystematisch erscheinen, erklärt sich aber folgendermaßen: Kapitel 5 bezieht sich auf die vorausgegangenen Kapitel 1 bis 4 und zeigt dies auch in der Zählung an (mit gewisser Ausnahme von 5-0).

So enthält z. B. 5-1 Tabellen, Übersichten, Listen u. ä. betreffend *synthetische Relationen*, entsprechend dem Kapitel 1: „synthetische Relationen“. Oder 5-1-1: Aussagen-Logik (innerhalb der synthetischen Relationen) nimmt Bezug auf 1-1: Aussagen-Logik.

Daher gibt es natürlich keinen Punkt 5-5, denn 5 steht eben für Kapitel 5, 5-5 würde sich dann auf sich selbst beziehen. Die anderen Kapitel, auf die sich Kap. 5 bezieht, sind nur 4, daher kann die Zählung auch nur bis 5-4 gehen.

Hier werden auf der 4. Ebene auch nicht systematisch immer 5 Punkte aufgezählt, so beginnt es mit 5-1-1-4 und endet mit 5-4-5-2.

5 – 0 GESAMT-ÜBERSICHTEN

5-0-1 Überblick

5-0-2 Ontologische Voraussetzungen

5-0-3 Grundstruktur der Integralen Logik

5-0-4 Übersicht über ausgewählte Strukturen – Systematik

5-0-5 Übersicht über ausgewählte Strukturen – Beispiele

5-0-1 Überblick

RELATA

1) Objekte (extensional)

- Individuen: x_i / x_1, x_2 / x_n (in der Logik geht es primär um abstrakte / unbestimmte Objekte)
- Mengen: M, N; Mengenverknüpfungen: Vereinigungs- und Schnitt-Menge: $M \cup N$, $M \cap N$
- Klassen: Mengen aller Individuen x, mit einer klassen-bildenden Eigenschaft F bzw. G.
  ganzheitlich: K(F) *kollektiv*: {x / Fx}; $\lambda x(Fx)$ *individuell*: $x_1[Fx_1] \cup ... \cup x_n[Fx_n]$

2) Eigenschaften / Begriffe bzw. Begriffs-Mengen (intensional)

- Individual-Eigenschaften: $E(x_i)$
- Klassen-Eigenschaften, Allgemein-Begriffe: E(F), E(G)
- Definitionen: $E(F) =_{df} E(G) \cup E(H)$ bzw. $E(F) =_{df} E(G_1) \cup \ldots \cup E(G_n)$

RELATIONEN BZW. STRUKTUREN

(Relationen können sein: *sprachlich*: Aussagen / *real*: Sachverhalte / *psychisch*: Urteile)
Logische Relationen sind nur *funktional*, nicht zeitlich, örtlich, kausal.

1) synthetische Relationen

Relatoren: aussagen-logische: $\rightarrow$, $*\!\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$ usw., mengen-theoretische $\subset$, $\in$, = usw.
Besonders wichtig: *Implikation* $\rightarrow$ und *Positiv-Implikation* $*\!\rightarrow$.
Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T gibt u. a. den *Tautologie-Grad* an.

		$p^T \rightarrow$	$p^{T*} \rightarrow$
Aussagen-Logik	$A \rightarrow B$	3/4	1/2
Quantoren-Logik	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$(3/4)^n$	$(1/2)^n$
Prädikaten-Logik	$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$	$(3/4)^n$	$(1/2)^n$
Quantitäts-Logik	$p(X \rightarrow Y) = n/n = 1$	$(3/4)^n$	$(1/2)^n$

generell $\quad p(X \rightarrow Y) = r/n \quad \dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \qquad p^T = \dbinom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$

$\quad p(X *\!\rightarrow Y) = r/n\ /n \quad \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{r}{n} \qquad p^T = \dbinom{n}{r}(1/2)^r(1/2)^{n-r}$

2) Analytische Relationen (bei *Tautologien* gilt immer $p^T = 1$, bei *Kontradiktionen* $p^T = 0$)

analytische Relatoren: $\Rightarrow$, $*\!\Rightarrow$, ${}^+\!\wedge^+$, ${}^+\!\vee^+$ usw.

Aussagen-Logik	$A \wedge B \Rightarrow B$
Quantoren-Logik	$\Lambda x(Fx \wedge Gx) \Rightarrow \Lambda x(Gx)$
Prädikaten-Logik	$(Fx_1 \wedge Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \wedge Gx_n) \Rightarrow (Gx_1 \wedge ... \wedge Gx_n)$
Quantitäts-Logik	$p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1$
generell	$p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \geq r/n$

3) Semi-analytische Relationen

		$p^T \rightarrow$	$p^T *\!\rightarrow$
Aussagen-Logik	$A \vee B \longrightarrow A \wedge B$	2/4	1/3
Quantoren-Logik	$\Lambda x(Fx \vee Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \wedge Gx)$	$(4^n - 3^n + 1)/4^n$	$(1/3)^n$
Prädikaten-Logik	$(Fx_1 \vee Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \vee Gx_n) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \wedge Gx_n)$	$(4^n - 3^n + 1)/4^n$	$(1/3)^n$
Quantitäts-Logik	$p(X \vee Y) = n/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = n/n$	$(4^n - 3^n + 1)/4^n$	$(1/3)^n$

generell $\quad p(X \vee Y) = r/n\ *\!\!\longrightarrow p(Y) = s/n \qquad p^T = \dbinom{r}{r-s}(1/3)^s(2/3)^{r-s}$

Überblick über Komponenten der Integralen Logik

1) OBJEKTE	z. B.:
1. Mengen	
• Individuen	x, y
• Klassen	F, G
2. Begriffe / Eigenschaften	
• Individual-Begriffe	E(x), E(y)
• Klassen-Begriffe	E(F), E(G)

2) RELATIONEN (nur Implikationen)

1. Synthetische Relationen	
a) *Qualitative*	
• Positive	$X \rightarrow Y$
• Negative	$\neg(X \rightarrow Y)$
b) *Quantitative*	
• Deterministische	$p(X \rightarrow Y) = 1$
• Statistische	$0 < p(X \rightarrow Y) < 1$
2. Analytische Relationen	
a) *Qualitative*	
• Streng analytische	
– Tautologie	$X \wedge Y \Rightarrow Y$
– Kontradikt.	$X \vee \neg X \nRightarrow X \wedge \neg X$
• Partiell analytische	
1. Wahrscheinliche	$X \vee Y \longrightarrow Y$
2. Unwahrscheinliche	$X \vee Y \longrightarrow \neg X \wedge \neg Y$
b) *Quantitative*	
• Streng analytische (Tautologien)	
– Determinist.	$p^T[p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1] = 1$
– Statistische	$p^T[p(X \wedge Y) = 0{,}5 \Rightarrow p(Y) \geq 0{,}5] = 1$
• Partiell analytische	
– Determinist.	$p^T[p(X \vee Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1] < 1$
– Statistische	$p^T[p(X \wedge Y) = 2/4 \longrightarrow p(Y) = 3/4] = 4/9$

5-0-2 Ontologische Voraussetzungen

1) *Neutrale, reale, psychische und sprachliche Dimension*

Neutral	Entität	Struktur	Sprach-Ebene
Real			Objekt-sprachlich
Extensional	Objekt/Sache	Sachverhalt	
Intensional	Eigenschaft/Begriff	„Begriffsverhalt“	
Psychisch	psychischer Begriff	Urteil/Gedanke	Objekt-sprachlich
Sprachlich	Wort/Begriff	Satz/Aussage	Meta-sprachlich

Erklärung:
Die Logik bezieht sich vor allem auf zwei Komponenten: Entität und Struktur.
Eine *Struktur* ist eine *Relation zwischen Entitäten*, ein Relationsgebilde. Man kann aber auch vereinfachend den Begriff ‚Relation' mit ‚Struktur ' austauschen.

Es ist letztlich für die Logik irrelevant, ob man Entität und Struktur *real*, *sprachlich* oder *psychisch* interpretiert. Dennoch ist normalerweise eine *neutrale* oder real(istisch)e Deutung am einfachsten zu handhaben.

2) *Logischer Aufbau der Welt*
(real – extensionale Form))

Welt

Molekül-Sachverhalt ⟷ Molekül-Sachverhalt

Molekül-Sachverhalt

Atom-Sachverhalt ⟷ Atom-Sachverhalt

Atom-Sachverhalt

Objekt ⟷ Objekt

Erklärung:

Welt
= Mega-Molekül-Sachverhalt, d. h. der maximal komplexe Sachverhalt, der sich aus allen anderen Sachverhalten zusammensetzt (oder einfacher die Menge aller Sachverhalte)

Molekül-Sachverhalt
= Relation zwischen Atom-Sachverhalten

Atom-Sachverhalt
= Relation zwischen Objekten

Logische *Grundbestandteile* der Welt sind also zunächst: *Objekte* und *Relationen*.

3) *Relationen*
Das Zeichen $\longleftrightarrow$ steht für eine beliebige (logische) Relation.
Relationen sind *Kategorien*, somit nicht weiter zurückführbar. Man kann unterscheiden:

- Arten von Relationen
  - *hyper-logische* (z. B. kausale, temporale, lokale) Relationen
  - *logische* (korrelative, funktionale), insbesondere aussagen-logische Relationen
    synthetische wie Implikation ($\rightarrow$), Äquivalenz ($\leftrightarrow$), Disjunktion ($\vee$)
    analytische wie analytische Implikation ($\Rightarrow$), analytische Äquivalenz ($\Leftrightarrow$) usw.

Die Logik erfasst nur die logischen Relationen *vollständig*, aber auch hyper-logische Relationen haben eine logische *Komponente*, die also logisch darzustellen ist.

- Quantität von Relationen
  - singuläre: $p > 0$, $q = 1$ (q = absolute Häufigkeit)
  - partikuläre bzw. statistische: $0 < p < 1$
  - generelle bzw. deterministische: $p = 1$ (oder $p = 0$)

4) *Objekte*
Die Objekte einer logischen Relation müssen nicht als *logische Objekte* ausgewiesen sein. Bei einem logischem Objekt ist u. a. von *räumlichen* und *zeitlichen* Aspekten abgesehen. Aber logische Relationen können durchaus auch zwischen konkreten, raum-zeitlichen Objekten bestehen. *Entscheidend* sind in der Logik eben die *Relationen*, bei denen wird allerdings von Raum, Zeit, Kausalität usw. abstrahiert. Logische Relationen sind rein *funktional*.

- *Quantität* von Objekten

Klasse
aller Objekte

Teilklasse$_1$ ...... Teilklasse$_n$

Individuum$_1$ ...... Individuum$_n$ Individuum$_1$ ...... Individuum$_m$

Erläuterung:
Man unterscheidet bei der Quantität vereinfachend:
– Individuen (singuläre Objekte)
– Teil-Klassen (partikuläre Objekte)
– Mengen (Vielzahl beliebiger Individuen)
– Klassen (alle Individuen mit eine klassenbildenden Eigenschaft)
– All-Klasse, die Klasse aller Klassen

• *Abstraktion* von Objekten

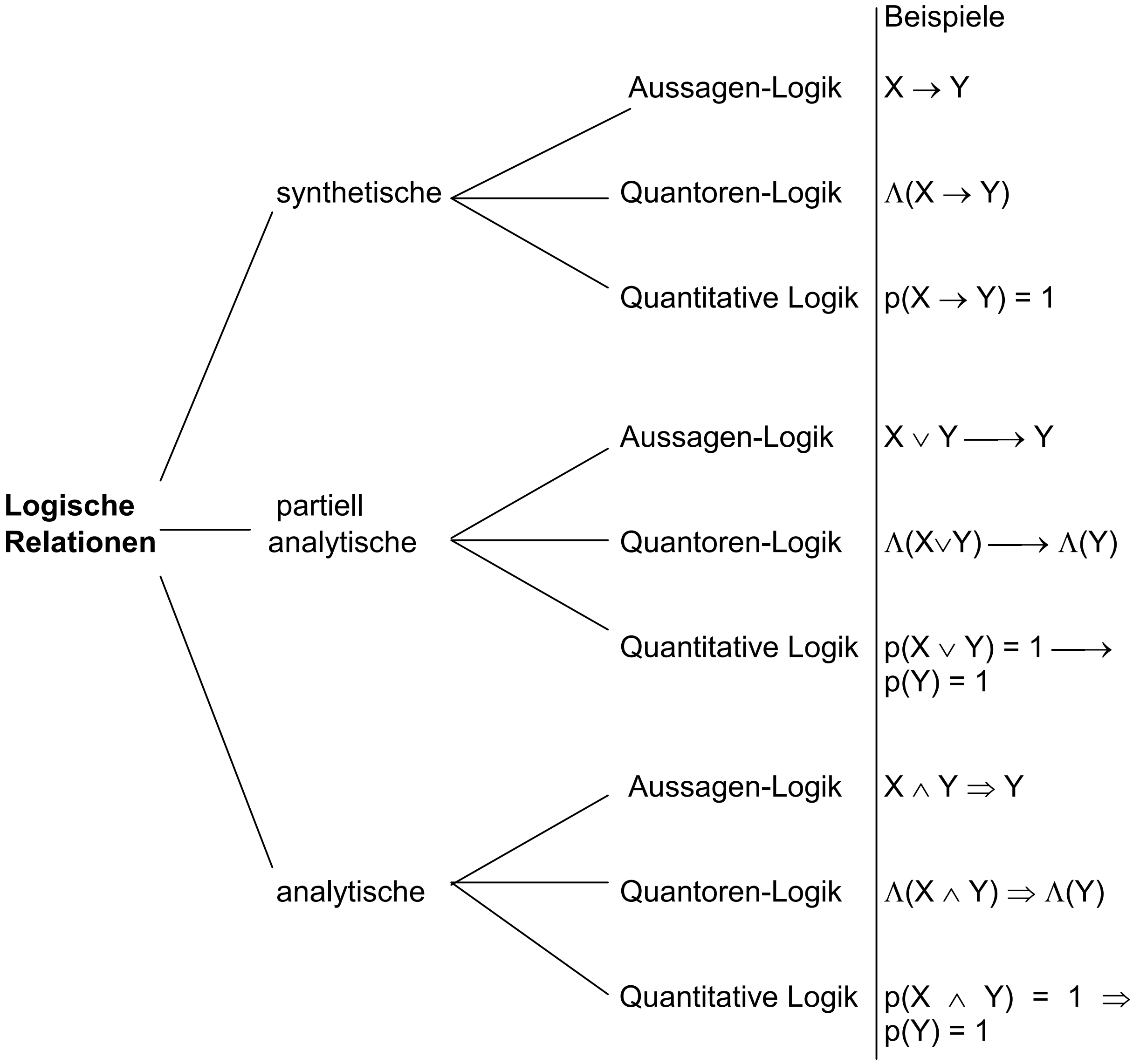
konkretes Objekt

abstraktes Objekt + kontingente Eigenschaften

formales Objekt + wesentliche Eigenschaften

Erklärung
• konkretes Objekt
Es ist das reale Objekt, mit *allen – wesentlichen* und *kontingenten* (unwesentlichen) – Eigenschaften. Das konkrete Objekt setzt sich zusammen aus dem abstrakten Objekt + den kontingenten Eigenschaften. Konkrete Objekte sind für uns nie vollständig fassbar, wir können nur einzelne Aspekte von ihnen untersuchen und darstellen. Indem wir diese Aspekte hinzufügen, konkretisieren wir die *Beschreibung/Theorie* (die mehr Information enthält als die Definition).
• abstraktes Objekt
Es umfasst den Träger + die *wesentlichen* Eigenschaften, es ist gewissermaßen der *Kern*, die Identität des Gesamt-Objektes. Diese Identität wird sprachlich in einer *Definition* dargestellt. Wir beziehen uns in der Logik wie in der Sprache vor allem auf abstrakte Objekte.
• formales Objekt
Das formale Objekt beinhaltet selbst keine Eigenschaften, es ist quasi nur ein *Träger* von Eigenschaften. Man könnte auch von einem *Objekt-Prinzip* ausgehen oder von einem Ganzheits-Prinzip bzw. Substanz-Prinzip.
• Eigenschaften
Wenn man vom formalen Objekt absieht, so *beinhalten* Objekte bereits *Eigenschaften*, es kommen ihnen nicht nur Eigenschaften zu. Der Eigenschaftsbegriff ist also ebenfalls fundamental. Man kann zwar theoretisch Eigenschaften durch *Klassenzugehörigkeiten* ersetzen, letztendlich muss man sich aber doch auf Eigenschaften beziehen, die einen höheren Erklärungswert haben.

5-0-3 Grundstruktur der Integralen Logik



Veränderte Grundstruktur der Integralen Logik

			z. B.:
Logische Relationen	Aussagen-L.	synthetisch	$X \rightarrow Y$
		semi-analytisch	$X \vee Y \longrightarrow Y$
		analytisch	$X \wedge Y \Rightarrow Y$
	Quantoren-L.	synthetisch	$\Lambda(X \rightarrow Y)$
		semi-analytisch	$\Lambda(X \vee Y \longrightarrow Y)$
		analytisch	$\Lambda(X \wedge Y \Rightarrow Y)$
	Quantitat. L.	synthetisch	$p(X \rightarrow Y) = r/n$
		semi-analytisch	$p(X \vee Y \longrightarrow Y) = r/n$
		analytisch	$p(X \wedge Y \Rightarrow Y) = n/n$

5-0-4 Übersicht über ausgewählte Strukturen (systematisch)

(Überwiegend systematisch, nicht anhand von Beispielen.)

	Struktur	p^T	p^T/dez.
1) SYNTHETISCH			
1. Aussagen-Logik			
1.1 absolut (fragwürdig)			
Tautologie	$X \Rightarrow (Y \vee \neg Y)$	4/4	1
Kontradiktion	$(X \vee \neg X) \nRightarrow (Y \wedge \neg Y)$	0/4	0
Tautologator	$X \top Y$	4/4	1
Antilogator	$X \perp Y$	0/4	0
1.2 relativ			
semi-tautologisch	$X \rightarrow Y$	3/4	0,75
logisch neutral	$X \leftrightarrow Y$	2/4	0,5
semi-kontradiktorisch	$X \wedge Y$	1/4	0,25
Negationen	$\neg(X \rightarrow Y)$	1/4	0,25
	$\neg(X \leftrightarrow Y)$	2/4	0,5
	$\neg (X \wedge Y)$	3/4	0,75
2. Quantoren-Logik			
2.1 einfach			
alle	$\Lambda(X)$: $X_1 \wedge \ldots \wedge X_n$	$1/2^n$	$0{,}5^n$
alle nicht	$\Lambda\neg(X)$: $\neg X_1 \wedge \ldots \wedge \neg X_n$	$1/2^n$	$0{,}5^n$
einige	$V(X)$: $X_1 \vee \ldots \vee X_n$	$1 - 1/2^n$	$1 - 0{,}5^n$
einige nicht	$V\neg(X)$: $\neg X_1 \vee \ldots \vee \neg X_n$	$1 - 1/2^n$	$1 - 0{,}5^n$
2.2 komplex			
alle	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
	$(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_n \rightarrow Y_n)$		
alle nicht	$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
	$\neg(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge \ldots \wedge \neg(X_n \rightarrow Y_n)$		
einige	$V(X \rightarrow Y)$	$(4^n - 1)/4^n$	$1 - 0{,}25^n$
	$(X_1 \rightarrow Y_1) \vee \ldots \vee (X_n \rightarrow Y_n)$		
einige nicht	$V\neg(X \rightarrow Y)$	$(4^n - 3^n)/4^n$	$1 - 0{,}75^n$
	$\neg(X_1 \rightarrow Y_1) \vee \ldots \vee \neg(X_n \rightarrow Y_n)$		
Alternative:			
alle	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
alle nicht	$\Lambda(X \rightarrow \neg Y)$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
einige	$V(X \wedge Y)$	$(4^n - 3^n)/4^n$	$1 - 0{,}75^n$
einige nicht	$V(X \wedge \neg Y)$	$(4^n - 3^n)/4^n$	$1 - 0{,}75^n$

	Struktur	p^T	p^T/s
3. Quantitative Logik			
3.1 semi-tautologisch	p(X → Y) = r/n	$\binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$	3/4
(strukturell)	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$		
3.2 logisch neutral	p(X ↔ Y) = r/n	$\binom{n}{r}(1/2)^r(1/2)^{n-r}$	1/2
(strukturell)	$\frac{a+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$		
3.3 semi-kontradiktor.	p(X ∧ Y) = r/n	$\binom{n}{r}(1/4)^r(3/4)^{n-r}$	1/4
(strukturell)	$\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$		
4. Quantitative Aussagen-Logik			
4.1 positiv	p(X → Y) = r/n = 1 r = n	$1\times(3/4)^r\times 1 = (3/4)^r = (3/4)^n$	3/4
4.2 negativ	p(X → Y) = r/n = 0 r = 0	$1 \times 1\times(1/4)^n = (1/4)^n$	3/4

$p^T/ s = p^T$ *strukturell*: der p^T-Wert des Junktors bzw. Relators, unabhängig von der Quantifizierung

	Struktur	p^T	p^T/dez.	p^T/s
5. Quantitative Quantoren-Logik				
einfach				
alle (= n)	$p(X) = 1$	$1/2^n$	$0{,}5^n$	1/2
alle nicht	$p(X) = 0$	$1/2^n$	$0{,}5^n$	1/2
einige	$p(X) > 0$	$1 - 1/2^n$	$1 - 0{,}5^n$	1/2
einige nicht	$p(X) < 1$	$1 - 1/2^n$	$1 - 0{,}5^n$	1/2
komplex				
alle (= n)	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$	3/4
alle nicht	$p(X \rightarrow Y) = 0$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$	3/4
einige	$p(X \rightarrow Y) > 0$	$1 - (1/4)^n$	$1 - 0{,}25^n$	3/4
einige nicht	$p(X \rightarrow Y) < 1$	$1 - (3/4)^n$	$1 - 0{,}75^n$	3/4
Alternativen	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$	3/4
	$p(X \rightarrow \neg Y) = 1$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$	3/4
	$p(X \wedge Y) > 0$	$1 - (3/4)^n$	$1 - 0{,}75^n$	1/4
	$p(X \wedge \neg Y) > 0$	$1 - (3/4)^n$	$1 - 0{,}75^n$	1/4

2) ANALYTISCH

1. Aussagen-Logik

1.1 streng analytisch				
Tautologie	$X \wedge Y \Rightarrow Y$	4/4	1	3/4
Kontradiktion	$X \vee \neg X \not\Rightarrow X \wedge \neg X$	0/4	0	3/4
1.2 partiell analytisch				
semi-tautologisch	$X \vee Y \longrightarrow Y$	3/4	0,75	3/4
logisch neutral	$X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$	2/4	0,5	3/4
semi-kontradikt.	$X / Y \longrightarrow X \wedge Y$	1/4	0,25	3/4

2. Quantoren-Logik

2.1 streng analytisch				
Tautologie	$\Lambda(X) \Rightarrow V(X)$	$2^n/2^n$	1	3/4
Kontradiktion	$\Lambda(X) \;{*}\!\not\Rightarrow V\neg(X)$	0/1	0	1/2
2.2 partiell analytisch	$V(X) \longrightarrow \Lambda(X)$	$1/2^{n-1}$	$0{,}5^{\,n-1}$	3/4

Λ (alle) = n/n, V (einige) > 0/n. Kontradiktion nur mit *Positiv*-Implikation: $*\!\not\Rightarrow$

	Struktur	p^T

3. Quantitative Logik

3.1 streng analytische $p(X \wedge Y) = r/n \ {*}\!\Rightarrow\ p(Y) = s/n$ $\qquad \binom{n-r}{n-s}(2/3)^{n-s}(1/3)^{s-r}$

Aussagen-Logik: $X \wedge Y \ {*}\!\Rightarrow\ Y$

Formel: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \ {*}\!\Rightarrow\ \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = \dfrac{s}{n}$

- tautologisch $r \leq s$
- kontradiktorisch $r > s$
- partiell tautologisch $r = s$ (bzw. bestimmte Werte)

3.2 partiell analytische $p(X) = r/n \ {*}\!\longrightarrow\ p(X \wedge Y) = s/n$ $\qquad \binom{r}{r-s}(1/2)^{r-s}(1/2)^{s}$

Aussagen-Logik: $X \ {*}\!\longrightarrow\ X \wedge Y$

Formel: $\dfrac{a+b}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \ {*}\!\longrightarrow\ \dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{s}{n}$

- tautologisch $r \geq s$
- kontradiktorisch $r < s$
- partiell tautologisch $r = s$ (bzw. bestimmte Werte)

4. Quantitative Aussagen-Logik

4.1 streng analytisch
Tautologie/deterministisch

$p(X \wedge Y) = r/n = 1 \ {*}\!\Rightarrow\ p(Y) = s/n = 1$ $\qquad \binom{n-r}{n-s}(2/3)^{n-s}(1/3)^{s-r} = 1$

$r = s = n$

4.2 partiell analytisch
partiell tautologisch/deterministisch

$p(X) = r/n = 1 \ {*}\!\longrightarrow\ p(X \wedge Y) = s/n = 1$ $\qquad \binom{r}{r-s}(1/2)^{r-s}(1/2)^{s} = (1/2)^{s}$

$r = s = n$

5. Quantitative Quantoren-Logik

5.1 streng analytisch $p(X \rightarrow Y) = n/n = 1 \ {*}\!\Rightarrow$ $\qquad 3^n/3^n = 1$
$p(X \rightarrow Y) > 0$

5.2 partiell analytisch $p(X \rightarrow Y) > 0 \ {*}\!\longrightarrow$ $\qquad 3^n/(4^n - 1)$
$p(X \rightarrow Y) = n/n = 1$

5-0-5 Übersicht über ausgewählte Strukturen (Beispiele)

(Überwiegend anhand von Zahlen-Beispielen. Jeweils mit n = 5.)

	Struktur	p^T	p^T/dez.
1) SYNTHETISCH			
1. Aussagen-Logik			
1.1 absolut (fragwürdig)			
Tautologie	$X \Rightarrow (Y \vee \neg Y)$	4/4	1
Kontradiktion	$(X \vee \neg X) \not\Rightarrow (Y \wedge \neg Y)$	0/4	0
Tautologator	$X \top Y$	4/4	1
Antilogator	$X \perp Y$	0/4	0
1.2 relativ			
semi-tautologisch	$X \rightarrow Y$	3/4	0,75
logisch neutral	$X \leftrightarrow Y$	2/4	0,5
semi-kontradiktorisch	$X \wedge Y$	1/4	0,25
Negationen	$\neg(X \rightarrow Y)$	1/4	0,25
	$\neg(X \leftrightarrow Y)$	2/4	0,5
	$\neg (X \wedge Y)$	3/4	0,75
2. Quantoren-Logik			
2.1 einfach			
alle (= n = 5)	$\Lambda(X)$: $X_1 \wedge \ldots \wedge X_5$	1/32	0,03
alle nicht	$\Lambda\neg(X)$: $\neg X_1 \wedge \ldots \wedge \neg X_5$	1/32	0,03
einige	$V(X)$: $X_1 \vee \ldots \vee X_5$	31/32	0,97
einige nicht	$V\neg(X)$: $\neg X_1 \vee \ldots \vee \neg X_5$	31/32	0,97
2.2 komplex			
alle (= n = 5)	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	243/1024	0,24
alle nicht	$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	1/1024	≈ 0
einige	$V(X \rightarrow Y)$	1023/1024	≈ 1
einige nicht	$V\neg(X \rightarrow Y)$	781/1024	0,76
Alternative			
alle	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	243/1024	0,24
alle nicht	$\Lambda(X \rightarrow \neg Y)$	243/1024	0,24
einige	$V(X \wedge Y)$	781/1024	0,76
einige nicht	$V(X \wedge \neg Y)$	781/1024	0,76

	Struktur	p^T	p^T/dez.	p^T/s
3. Quantitative Logik				
3.1 semi-tautologisch	$p(X \rightarrow Y) = 5/5$	243/1024	0,24	3/4
(strukturell)	4/5	*405/1024	0,40	
	3/5	270/1024	0,26	
	2/5	90/1024	0,09	
	1/5	15/1024	0,02	
	0/5	1/1024	≈0,00	
3.2 logisch neutral	$p(X \leftrightarrow Y) = 5/5$	32/1024	0,03	2/4
(strukturell)	4/5	160/1024	0,16	
	3/5	*320/1024	0,31	
	2/5	*320/1024	0,31	
	1/5	160/1024	0,16	
	0/5	32/1024	0,03	
3.3 semi-kontradiktorisch	$p(X \wedge Y) = 5/5$	1/1024	≈0,00	1/4
(strukturell)	4/5	15/1024	0,02	
	3/5	90/1024	0,09	
	2/5	270/1024	0,26	
	1/5	*405/1024	0,40	
	0/5	243/1024	0,24	
4. Quantitative Aussagen-Logik				
4.1 positiv				
	$p(X \rightarrow Y) = 1/1$	*3/4	0,75	3/4
	2/2	9/16	0,56	
	3/3	27/64	0,42	
	4/4	81/256	0,32	
	5/5	243/1024	0,24	
	6/6	729/4096	0,18	
	7/7	2187/16385	0,13	
	8/8	6561/65536	0,10	
4.2 negativ				
	$p(X \rightarrow Y) = 0/1$	*1/4	0,25	3/4
	0/2	1/16	0,06	
	0/3	1/64	0,02	
	0/4	1/256	≈ 0,00	
	0/5	1/1024	≈ 0,00	

*Wert = jeweils der höchste p^T-Wert der Verteilung

	Struktur		p^T	p^T/dez.	p^T/s
5. Quantitative Quantoren-Logik					
2.1 einfach					
alle (= n = 5)	$p(X) = 1$	$p(X) = 5/5$	1/32	0,03	1/2
alle nicht	$p(X) = 0$	$p(X) = 0/5$	1/32	0,03	1/2
einige	$p(X) > 0$	$p(X) > 0/5$	31/32	0,97	1/2
einige nicht	$p(X) < 1$	$p(X) < 5/5$	31/32	0,97	1/2
2.2 komplex					
alle (= n = 5)	$p(X \rightarrow Y) = 1$		243/1024	0,24	3/4
alle nicht	$p(X \rightarrow Y) = 0$		1/1024	≈0,00	3/4
einige	$p(X \rightarrow Y) > 0$		1023/1024	≈1,00	3/4
einige nicht	$p(X \rightarrow Y) < 1$		781/1024	0,76	3/4
Alternativen	$p(X \rightarrow Y) = 1$		243/1024	0,24	3/4
	$p(X \rightarrow \neg Y) = 1$		243/1024	0,24	3/4
	$p(X \wedge Y) > 0$		781/1024	0,76	1/4
	$p(X \wedge \neg Y) > 0$		781/1024	0,76	1/4

2) ANALYTISCH

1. Aussagen-Logik

	Struktur	p^T	p^T/dez.	p^T/s
1.1 streng analytisch				
Tautologie	$X \wedge Y \Rightarrow Y$	4/4	1	3/4
Kontradiktion	$(X \vee \neg X) \nRightarrow (X \wedge \neg X)$	0/4	0	3/4
1.2 partiell analytisch				
semi-tautologisch	$X \vee Y \longrightarrow Y$	3/4	0,75	3/4
logisch neutral	$X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$	2/4	0,5	3/4
semi-kontradikt.	$X / Y \longrightarrow X \wedge Y$	1/4	0,25	3/4

2. Quantoren-Logik

	Struktur	p^T	p^T/dez.	p^T/s
2.1 streng analytisch				
Tautologie	$\Lambda(X) \Rightarrow V(X)$	32/32	1	3/4
Kontradiktion	$\Lambda(X) {*}\nRightarrow V\neg(X)$	0/1	0	1/2
2.2 partiell analytisch	$V(X) \longrightarrow \Lambda(X)$ $X_1 \vee \ldots \vee X_5 \longrightarrow$ $X_1 \wedge \ldots \wedge X_5$	2/32	0,06	3/4

	Struktur	p^T	p^T /dez.	p^T /s
3. Quantitative Logik				
3.1 streng analytisch				
Tautologie	$p(X \rightarrow Y) = 4/5 \;\wedge$ $p(X) = 5/5 \;\; {*}{\Rightarrow} \;\; p(Y) = 4/5$	5/5	1	1/2
Kontradiktion	$p(X \rightarrow Y) = 4/5 \;\wedge$ $p(X) = 5/5 \;\; {*}{\not\Rightarrow} \;\; p(Y) = 3/5$	0/5	0	1/2
3.2 partiell analytisch				
- quantitativ	$p(X \leftrightarrow Y) \; {*}{\longrightarrow} \; p(X \rightarrow Y)$			1/2
	2/5 5/5	40/320 (1/8)	0,13	
	4/4	120/320 (3/8)	0,38	
	3/5	120/320 (3/8)	0,38	
	2/5	40/320 (1/8)	0,13	
- strukturell	$p(X \rightarrow Y) \;\; {*}{\longrightarrow} \;\; p(X \leftarrow Y)$			1/2
	5/5 5/5	32/243	0,13	
	4/5	80/243	0,33	
	3/5	80/243	0,33	
	2/5	40/243	0,16	
	1/5	10/243	0,04	
	0/5	1/243	≈0,00	
4. Quantitative Aussagen-Logik				
4.1 streng analytisch				
Tautologie	$p(X \leftrightarrow Y) = 5/5 \; {*}{\Rightarrow}$ $p(X \rightarrow Y) = 5/5$	32/32	1	1/2
Kontradiktion	$p(X \leftrightarrow Y) = 5/5 \; {*}{\not\Rightarrow}$ $p(X \rightarrow Y) = 3/5$	0/32	0	1/2
4.2 partiell analytisch	$p(X \rightarrow Y) = 5/5 \; {*}{\longrightarrow}$ $p(X \leftarrow Y) = 5/5$	32/243	0,13	1/2
5. Quantitative Quantoren-Logik				
5.1 streng analytisch	$p(X \rightarrow Y) = 5/5 \; {*}{\Rightarrow}$ $p(X \rightarrow Y) > 0/5$	243/243	1	1/2
5.2 partiell analytisch	$p(X \rightarrow Y) = 5/5 \; {*}{\longrightarrow}$ $p(X \wedge Y) > 0/5$	211/243	0,87	1/2

ANMERKUNGEN ZU 5-0-4 UND 5-0-5

1. p^T/dez. steht für den *Dezimalwert* von p^T, auf 2 Stellen hinter dem Komma gekürzt. Dabei ergibt sich manchmal nur noch ein Wert von ≈ 0, obwohl der Realwert > 0 ist.
2. p^T/s steht für p^Tstrukturell. Gemeint ist damit der Wert des zentralen (qualitativen, aussagen-logischen) Relators bzw. Junktors, nicht der Wahrheitstafel. Dieser Wert wird normalerweise nur angegeben, wenn er nicht mit p^T identisch ist.
3. Diese Übersicht konzentriert sich auf synthetische und analytische *Implikationen*.
4. Wie gesagt ist es fragwürdig und noch weiter zu klären, ob man bei *synthetischen* Strukturen auch *streng* tautologische (bzw. kontradiktorische) Strukturen annehmen soll. Ich halte es für besser, dies *analytischen* Strukturen vorzubehalten.
5. Diese Übersichten beschränken sich auf Strukturen mit *zwei* Variablen.
6. Die Begriffe *semi-tautologisch* usw. beziehen sich nur auf die Struktur. So ist $p^T(X \rightarrow Y) = 3/4$. Aber z. B. $p^T[p(X \rightarrow Y) = 5/5] = 243/1024$, der quantitative Ausdruck ist also nicht semi-tautologisch (> 0,5), sondern semi-kontradiktorisch (< 0,5).
7. Die Brüche werden *ungekürzt* dargestellt. Bei der empirischen Wahrscheinlichkeit p ist das ohnehin notwendig, denn $p(X \rightarrow Y) = 5/5 = 1$ ist z. B. zu unterscheiden von $p(X \rightarrow Y) = 4/4 = 1$. Aber ich bevorzuge auch bei der theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T ungekürzte Werte zur besseren Vergleichbarkeit.
8. Die Dezimal-Werte einer Verteilung müssten sich eigentlich auf den *Wert 1 addieren*, wegen der Kürzung auf 2 Stellen hinter dem Komma ergibt sich das aber nicht.
9. Ich gehe im Wesentlichen von zwei Variablen X und Y aus, für *eine* Variable X gilt: $p^T[X] = 1/2 = 0{,}5$.
10. Folgende Gleichungen gelten (systematische Übersicht im Text): $1 - (3/4)^n = (4^n - 3^n)/4^n$ und $1 - (1/4)^n = (4^n - 1)/4^n$
11. Die *Positiv-Implikation* X *→ Y (mit all ihren Variationen) habe ich im synthetischen Bereich nicht berücksichtigt, ihre p^T besitzt in der Grundversion den Wert 1/2 = 0,5.
12. Zur Demonstration der *Kontradiktion* benötige ich bei diesem Beispiel die *Positiv*-Implikation $\Lambda(X) \ast\not\Rightarrow V\neg(X)$, denn $\Lambda(X) \longrightarrow V\neg(X)$ ist keine Kontradiktion, weil bei der *normalen* Implikation nur gilt: Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion. Daher erhalte ich hier auch nicht wie bei $\Lambda(X) \Rightarrow V(X)$ den Nenner 32, sondern nur den Nenner 1.
13. Grundsätzlich gilt bei einem *quantitativen* Schluss p(Prämisse) ⟶ p(Konklusion) bzw. p(Prämisse) ⇒ p(Konklusion): Die *Prämisse* definiert den *Nenner* bei der Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T des Schlusses. Dabei ergibt sich bei Verwendung der Implikation ein anderer Wert als bei der *Positiv*-Implikation.

5 – 1 SYNTHETISCHE RELATIONEN

5-1-1 Aussagen-Logik

5-1-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

5-1-3 Quantitative Logik

5-1-4 Quantitative Aussagen-Logik

5-1-5 Quantitative Quantoren-Logik

5-1-1 Aussagen-Logik

5-1-1-1 ÜBERSICHT ÜBER DIE RELATOREN

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		
1) Tautologie	+	+	+	+	$X \top Y$	X oder nicht X und Y oder nicht Y
2) Disjunktion	+	+	+	−	$X \vee Y$	X oder Y (oder beide)
3) Replikation	+	+	−	+	$X \leftarrow Y$	nur wenn Y, auch X
4) Präpension	+	+	−	−	X ⌋ Y	jedenfalls X (vielleicht Y)
5) Implikation	+	−	+	+	$X \rightarrow Y$	immer wenn X, dann Y
6) Postpension	+	−	+	−	X ⌊ Y	jedenfalls Y (vielleicht X)
7) Äquivalenz	+	−	−	+	$X \leftrightarrow Y$	X ist äquivalent Y
8) Konjunktion	+	−	−	−	$X \wedge Y$	X und Y
9) Exklusion	−	+	+	+	$X \mid Y$	X oder Y (aber nicht beide nicht)
10) Kontravalenz	−	+	+	−	X >< Y	X entweder X oder Y
11) Postnonpension	−	+	−	+	X ⌈ Y	keinesfalls Y
12) Postsektion	−	+	−	−	X >– Y	X und nicht Y
13) Pränonpension	−	−	+	+	X ⌉ Y	keinesfalls X
14) Präsektion	−	−	+	−	X –< Y	nicht X und Y
15) Rejektion	−	−	−	+	$X \nabla Y$	nicht X und nicht Y
16) Antilogie	−	−	−	−	$X \perp Y$	X und nicht X und Y und nicht Y

Die hier genannten *Bedeutungen* sind zwar die wichtigsten, aber es lassen sich auch andere Bedeutungen angeben. Wenn man z. B. eine *mengentheoretische Semantik* wählt, ergeben sich ganz andere Interpretationen, z. B. für $X \rightarrow Y$: X ist Teilmenge von Y.
Grundsätzlich lassen sich alle Relatoren auf einen *einzigen* zurückführen, z. B. auf die Exklusion $X \mid Y$ (auch „nand“ für non-and genannt) und auf die Rejektion $X \nabla Y$ (auch „nor“ für non-or genannt).
„nand“ und „nor“ spielen auch bei der Computer-Logik eine besondere Rolle.

5-1-1-2 DARSTELLUNG DER RELATOREN MIT $\wedge$ und $\neg$

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y	Relator	$\wedge$, $\neg$
1)	+	+	+	+	X T Y	
2)	+	+	+	−	$X \vee Y$	$\neg(\neg X \wedge \neg Y)$
3)	+	+	−	+	$X \leftarrow Y$	$\neg(\neg X \wedge Y)$
4)	+	+	−	−	$X \rfloor Y$	$\neg(\neg X \wedge Y) \wedge \neg(\neg X \wedge \neg Y)$
5)	+	−	+	+	$X \rightarrow Y$	$\neg(X \wedge \neg Y)$
6)	+	−	+	−	$X \lfloor Y$	$\neg(X \wedge \neg Y) \wedge \neg(\neg X \wedge Y)$
7)	+	−	−	+	$X \leftrightarrow Y$	$\neg(X \wedge \neg Y) \wedge \neg(\neg X \wedge \neg Y)$
8)	+	−	−	−	$X \wedge Y$	$X \wedge Y$
9)	−	+	+	+	$X \mid Y$	$\neg(X \wedge Y)$
10)	−	+	+	−	$X >< Y$	$\neg(X \wedge Y) \wedge \neg(\neg X \wedge \neg Y)$
11)	−	+	−	+	$X \lceil Y$	$\neg(X \wedge Y) \wedge \neg(\neg X \wedge Y)$
12)	−	+	−	−	$X >- Y$	$X \wedge \neg Y$
13)	−	−	+	+	$X \rceil Y$	$\neg(X \wedge Y) \wedge \neg(X \wedge \neg Y)$
14)	−	−	+	−	$X -< Y$	$\neg X \wedge Y$
15)	−	−	−	+	X ↲ Y	$\neg X \wedge \neg Y$
16)	−	−	−	−	X K Y	

5-1-1-3 EINTEILUNG DER RELATOREN NACH GÜLTIGEN WELTEN

- 4-Welt-Relator: $\top$
- 3-Welt-Relatoren: $\rightarrow$ $\leftarrow$ $\vee$ $\mid$
- 2-Welt-Relatoren: $\leftrightarrow$ $><$ $\rfloor$ $\lfloor$ $\rceil$ $\lceil$
- 1-Welt-Relatoren: $\wedge$ $-<$ $>-$ ∇
- 0-Welt-Relator: $\perp$

5-1-1-4 GRAPHISCHE DARSTELLUNG VON RELATOREN

1) X T Y (oder X $\top$ Y)

	X	$\neg$X
Y	X $\wedge$ Y	$\neg$X $\wedge$ Y
$\neg$Y	X $\wedge$ $\neg$Y	$\neg$X $\wedge$ $\neg$Y

2) X $\vee$ Y

	X	$\neg$X
Y	X $\wedge$ Y	$\neg$X $\wedge$ Y
$\neg$Y	X $\wedge$ $\neg$Y	

3) X $\leftarrow$ Y

	X	$\neg$X
Y	X $\wedge$ Y	
$\neg$Y	X $\wedge$ $\neg$Y	$\neg$X $\wedge$ $\neg$Y

4) X $\rfloor$ Y

	X	$\neg$X
Y	X $\wedge$ Y	
$\neg$Y	X $\wedge$ $\neg$Y	

5) X $\rightarrow$ Y

	X	$\neg$X
Y	X $\wedge$ Y	$\neg$X $\wedge$ Y
$\neg$Y		$\neg$X $\wedge$ $\neg$Y

6) X $\lfloor$ Y

	X	$\neg$X
Y	X $\wedge$ Y	$\neg$X $\wedge$ Y
$\neg$Y		

7) X ↔ Y

	X	¬X
Y	X ∧ Y	
¬Y		¬X ∧ ¬Y

8) X ∧ Y

	X	¬X
Y	X ∧ Y	
¬Y		

9) X \| Y

	X	¬X
Y		¬X ∧ Y
¬Y	X ∧ ¬Y	¬X ∧ ¬Y

10) X >< Y

	X	¬X
Y		¬X ∧ Y
¬Y	X ∧ ¬Y	

11) X ⌈ Y

	X	¬X
Y		
¬Y	X ∧ ¬Y	¬X ∧ ¬Y

12) X >– Y

	X	¬X
Y		
¬Y	X ∧ ¬Y	

13) X ⌉ Y

	X	¬X
Y		¬X ∧ Y
¬Y		¬X ∧ ¬Y

14) X –< Y

	X	¬X
Y		¬X ∧ Y
¬Y		

15) X ∇ Y

	X	¬X
Y		
¬Y		¬X ∧ ¬Y

16) X K Y (oder X ⊥ Y)

	X	¬X
Y		
¬Y		

5-1-1-5 ARTEN VON WAHRHEITS-TAFELN

- normale Wahrheitstafel

vollständig

	(X	→	Y)	⟶	Y
1.	+	+	+	+	+
2.	+	−	−	+	−
3.	−	+	−	+	+
4.	−	+	+	−	−

konzentriert

	(X → Y)	⟶	Y
1.	+	+	+
2.	−	+	−
3.	+	+	+
4.	+	−	−

- konjunktive Wahrheitstafel

	(X → Y)	∧	Y	⇒	(X → Y) ⟶ Y
1.	+	+	+	+	+
2.	−	−	−	+	+
3.	+	+	+	+	+
4.	+	−	−	+	−

konjunktive *Deutung*

1.	$(X \rightarrow Y) \wedge Y$	$\Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+-+-) \Rightarrow (+++-)$
2.	$\neg(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y$	$\Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(-+--) \Rightarrow (+++-)$
3.	$(X \rightarrow Y) \wedge Y$	$\Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+-+-) \Rightarrow (+++-)$
4.	$(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y$	$\Rightarrow \neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$	$(---+) \Rightarrow (---+)$

• implikative Wahrheitstafel

Imp	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	$+$	$\pm$	$+$
2.	$-$	$+$	$-$
3.	$+$	$\pm$	$+$
4.	$+$	$\pm$	$-$

implikative Deutung

1.	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+++-)$
2.	$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$	$(++++)$
3.	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+++-)$
4.	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y$	$(-+-+)$

• systematische implikative Wahrheitstafel

I/s.	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	$+$	$\pm$	$+$
2.	$+$	$\pm$	$-$
3.	$-$	$-$	$+$
4.	$-$	$+$	$-$

• verstärkte implikative Wahrheitstafel

	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$	$\wedge$	$(X \rightarrow Y)$	$\Rightarrow$	Y
1.	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
2.	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
3.	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
4.	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$

Die normale Tafel enthält implizit eine *konjunktive* Deutung, man kann sie aber (bei implikativen Relationen) auch *implikativ* deuten.

5-1-1-6 VOLLSTÄNDIGE WAHRHEITSTAFEL FÜR $X \rightarrow Y$

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		$X \rightarrow Y$
1) Tautologie	+	+	+	+	$X\ T\ Y$	+/−
2) Disjunktion	+	+	+	−	$X \vee Y$	+/−
3) Replikation	+	+	−	+	$X \leftarrow Y$	+/−
4) Präpension	+	+	−	−	$X \rfloor Y$	+/−
5) Implikation	+	−	+	+	$X \rightarrow Y$	+
6) Postpension	+	−	+	−	$X \lfloor Y$	+
7) Äquivalenz	+	−	−	+	$X \leftrightarrow Y$	+
8) Konjunktion	+	−	−	−	$X \wedge Y$	+
9) Exklusion	−	+	+	+	$X \mid Y$	+/−
10) Kontravalenz	−	+	+	−	$X >< Y$	+/−
11) Postnonpension	−	+	−	+	$X \lceil Y$	+/−
12) Postsektion	−	+	−	−	$X >- Y$	−
13) Pränonpension	−	−	+	+	$X \rceil Y$	+
14) Präsektion	−	−	+	−	$X -< Y$	+
15) Rejektion	−	−	−	+	$X \nabla Y$	+
(16) Antilogie	−	−	−	−	$X\ K\ Y$	+)

Die *normale Wahrheitstafel* kennt nur die 4 Relationen: $X \wedge Y$, $X >- Y$, $X -< Y$, $X \nabla Y$.
Die obige *vollständige* Wahrheitstafel berücksichtigt alle 16 logischen Möglichkeiten.
Allerdings ist die 16) Möglichkeit, die *Antilogie*, eine Kontradiktion; daher kann man sie nicht als echte Möglichkeit dazuzählen. Auch die *Tautologie* ist problematisch.
Es tauchen in der Wahrheitstafel unter dem $X \rightarrow Y$ 3 Werte auf: 1. +, 2. – und 3. +/–.
Dies ist folgendermaßen zu verstehen:

+: $\Phi \Rightarrow \Psi$: Ψ folgt logisch aus Φ. Z. B. $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$

– : $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$: $\neg\Psi$ folgt logisch aus Φ. Z. B. $X >- Y \Rightarrow \neg(X \rightarrow Y)$

+/–: $\Phi \longrightarrow \Psi$: Ψ folgt semi-analytisch aus Φ. Z. B. $X \vee Y \longrightarrow X \rightarrow Y$

$\Phi \longrightarrow \neg\Psi$: $\neg\Psi$ folgt semi-analytisch aus Φ. Z. B. $X \vee Y \longrightarrow \neg(X \rightarrow Y)$

Bei +/– ist $X \rightarrow Y$ nicht partiell wahr (falsch), sondern nur nicht sicher abzuleiten.
Es gibt ohne Tautologie und Antilogie: 7 +, 6 ±, 1 –. Sonst 8 +, 7±, 1 –.
Allerdings kann man den Wert – auch dem ± unterordnen, dann erhält man 8+ und 8±.

5-1-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

5-1-2-1 EINFACHE ALL- UND PARTIKULÄR-RELATIONEN

	Intensional	Extensional	Kurz-Form
1. alle x sind F			
Quantoren-Logik	$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda x(x \in F)$	$\Lambda(X)$
Prädikaten-Logik	$Fx_1 \wedge ... \wedge Fx_n$	$x_1 \in F \wedge ... \wedge x_n \in F$	$X_1 \wedge ... \wedge X_n$
2. alle x sind $\neg$F			
Quantoren-Logik	$\Lambda x\neg(Fx)$	$\Lambda x(x \notin F)$	$\Lambda\neg(X)$
Prädikaten-Logik	$\neg Fx_1 \wedge ... \wedge \neg Fx_n$	$x_1 \notin F \wedge ... \wedge x_n \notin F$	$\neg X_1 \wedge ... \wedge \neg X_n$
3. einige x sind F			
Quantoren-Logik	$Vx(Fx)$	$Vx(x \in F)$	$V(X)$
Prädikaten-Logik	$Fx_1 \vee ... \vee Fx_n$	$x_1 \in F \vee ... \vee x_n \in F$	$X_1 \vee ... \vee X_n$
4. einige x sind $\neg$F			
Quantoren-Logik	$Vx\neg(Fx)$	$Vx(x \notin F)$	$V\neg(X)$
Prädikaten-Logik	$\neg Fx_1 \vee ... \vee \neg Fx_n$	$x_1 \notin F \vee ... \vee x_n \notin F$	$\neg X_1 \vee ... \vee \neg X_n$

Eigentlich ist $\Lambda x(Fx)$ keine rein intensionale Darstellung, sondern eine *gemischt extensional-intensionale* Darstellung, weil einem Objekt x (extensional) eine Eigenschaft F (intensional) zugeordnet wird.

5-1-2-2 KOMPLEXE ALL- UND PARTIKULÄR-RELATIONEN

1. alle F sind G
   Sprache: ‚für alle x gilt: wenn sie F sind, sind sie auch G'
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$
   Vereinfacht: $\Lambda(X \rightarrow Y)$

2. alle F sind nicht G
   Sprache: ‚für alle x gilt: wenn sie F sind, sind sie nicht G'
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$
   Vereinfacht: $\Lambda(X \rightarrow \neg Y)$

3. einige F sind G
   Sprache: ‚für einige x gilt: sie sind F und sie sind G'
   Quantoren-Logik: $Vx(Fx \wedge Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee \ldots \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$
   Vereinfacht: $V(X \wedge Y)$

4. einige F sind nicht G
   Sprache: ‚für einige x gilt: sie sind F und sie sind nicht G'
   Quantoren-Logik: $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \vee \ldots \vee (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$
   Vereinfacht: $V(X \wedge \neg Y)$

Die Darstellung zeigt die häufigste Formalisierung bzw. logische Interpretation (die vereinfachte Darstellung habe ich allerdings selbst konzipiert).

5-1-2-3 MODELLE FÜR ALL- UND PARTIKULÄR-RELATIONEN

MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION

1. alle F sind G $\Lambda x(Fx \to Gx)$
2. alle F sind nicht G $\Lambda x\neg(Fx \to Gx)$
3. einige F sind G $Vx(Fx \to Gx)$
4. einige F sind nicht G $Vx\neg(Fx \to Gx)$

MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

1. alle F sind G $\Lambda x(Fx \to Gx)$
2. alle F sind nicht G $\Lambda x(Fx \to \neg Gx)$
3. einige F sind G $Vx(Fx \to Gx)$
4. einige F sind nicht G $Vx\ (Fx \to \neg Gx)$

MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

1. alle F sind G $\Lambda x(Fx \wedge Gx)$
2. alle F sind nicht G $\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx)$
3. einige F sind G $Vx(Fx \wedge Gx)$
4. einige F sind nicht G $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$

MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

1. alle F sind G $\Lambda x(Fx \to Gx)$
2. alle F sind nicht G $\Lambda x(Fx \to \neg Gx)$
3. einige F sind G $Vx(Fx \wedge Gx)$
4. einige F sind nicht G $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$

MODELL 5: POSITIV-IMPLIKATION UND NEGATIVE POSITIV-IMPLIKATION

1. alle F sind G $\Lambda x(Fx *\!\!\to Gx)$
2. alle F sind nicht G $\Lambda x(Fx *\!\!\to \neg Gx)$
3. einige F sind G $Vx(Fx *\!\!\to Gx)$
4. einige F sind nicht G $Vx(Fx *\!\!\to \neg Gx)$

Bei der Positiv-Implikation gilt wie bereits dargestellt:
$\Lambda x(Fx *\!\!\to \neg Gx) \Leftrightarrow \Lambda x\neg(Fx *\!\!\to Gx)$ und entsprechend.
So kann man auch anders schreiben:

1. alle F sind G $\Lambda x(Fx *\!\!\to Gx)$
2. alle F sind nicht G $\Lambda x\neg(Fx *\!\!\to Gx)$
3. einige F sind G $Vx(Fx *\!\!\to Gx)$
4. einige F sind nicht G $Vx\neg(Fx *\!\!\to Gx)$

5-1-3 Quantitative Logik

5-1-3-1 ÜBERSICHT ÜBER DIE RELATOREN

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		
1) Tautologie	+	+	+	+	p(X ⊤ Y)	$\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$
2) Disjunktion	+	+	+	−	p(X ∨ Y)	$\frac{a+b+c}{a+b+c+d}$
3) Replikation	+	+	−	+	X ← Y	$\frac{a+b+d}{a+b+c+d}$
4) Präpension	+	+	−	−	X ⌋ Y	$\frac{a+b}{a+b+c+d}$
5) Implikation	+	−	+	+	X → Y	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$
6) Postpension	+	−	+	−	X ⌊ Y	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$
7) Äquivalenz	+	−	−	+	X ↔ Y	$\frac{a+d}{a+b+c+d}$
8) Konjunktion	+	−	−	−	X ∧ Y	$\frac{a}{a+b+c+d}$
9) Exklusion	−	+	+	+	X | Y	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d}$
10) Kontravalenz	−	+	+	−	X >< Y	$\frac{b+c}{a+b+c+d}$
11) Postnonpension	−	+	−	+	X ⌈ Y	$\frac{b+d}{a+b+c+d}$
12) Postsektion	−	+	−	−	X >– Y	$\frac{b}{a+b+c+d}$
13) Pränonpension	−	−	+	+	X ⌉ Y	$\frac{c+d}{a+b+c+d}$
14) Präsektion	−	−	+	−	X –< Y	$\frac{c}{a+b+c+d}$

15) Rejektion	– – – +	X ∇ Y	$\frac{d}{a+b+c+d}$
16) Antilogie	– – – –	X ⊥ Y	$\frac{0}{a+b+c+d}$

Ich habe im Text mehrfach begründet, dass ich den *Tautologator* und den *Antilogator* nicht als echte Relatoren ansehe. Ich berücksichtige sie daher normalerweise nicht.

5-1-3-2 POSITIV-IMPLIKATION

p(X *→ Y)	p(X *→ ¬ Y)	p(¬X *→ Y)	p(¬X *→ ¬Y)
$\frac{b}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{c}{c+d}$	$\frac{d}{c+d}$
p(X ←* Y)	p(¬X ←* Y)	p(X ←* ¬Y)	p(¬X ←* ¬Y)
$\frac{a}{a+c}$	$\frac{c}{a+c}$	$\frac{b}{b+d}$	$\frac{d}{b+d}$

5-1-3-3 QUANTITÄT

A) absolute Quantität q

1) der Klasse	q(Klasse)	z. B.	800
2) einer Teilklasse	q(Teilklasse)	z. B.	200

B) relative Quantität p

1) der Klasse	$\frac{q(Klasse)}{q(Klasse)}$	z. B.	800/800 = 1
2) der Teilklasse	$\frac{q(Teilklasse)}{q(Klasse)}$		
a) echte relative Quantität		z. B.	200/800
b) rechnerische relative Quantität			
• Bruchdarstellung			
- beliebiger Bruch		z. B.	225/900
- maximal gekürzter Bruch (mit natürlichen Zahlen)		z. B.	1/4
• Prozentdarstellung		z. B.	25%
• Dezimaldarstellung		z. B.	0,25

5-1-4 Quantitative Aussagen-Logik

5-1-4-1 ÜBERSICHT ÜBER DIE RELATOREN, DETERMINISTISCH: p = 1

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		
1) Disjunktion	+	+	+	−	$p(X \vee Y) = \dfrac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1$	d = 0
2) Replikation	+	+	−	+	$p(X \leftarrow Y) = \dfrac{a+b+d}{a+b+c+d} = 1$	c = 0
3) Präpension	+	+	−	−	$p(X \rfloor Y) = \dfrac{a+b}{a+b+c+d} = 1$	c+d = 0
4) Implikation	+	−	+	+	$p(X \rightarrow Y) = \dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$	b = 0
5) Postpension	+	−	+	−	$p(X \lfloor Y) = \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = 1$	b+d = 0
6) Äquivalenz	+	−	−	+	$p(X \leftrightarrow Y) = \dfrac{a+d}{a+b+c+d} = 1$	b+c = 0
7) Konjunktion	+	−	−	−	$p(X \wedge Y) = \dfrac{a}{a+b+c+d} = 1$	b+c+d = 0
8) Exklusion	−	+	+	+	$p(X \mid Y) = \dfrac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$	a = 0
9) Kontravalenz	−	+	+	−	$p(X >< Y) = \dfrac{b+c}{a+b+c+d} = 1$	a+d = 0
10) Postnonpension	−	+	−	+	$p(X \lceil Y) = \dfrac{b+d}{a+b+c+d} = 1$	a+c = 0
11) Postsektion	−	+	−	−	$p(X >- Y) = \dfrac{b}{a+b+c+d} = 1$	a +c+d = 0
12) Pränonpension	−	−	+	+	$p(X \rceil Y) = \dfrac{c+d}{a+b+c+d} = 1$	a+b = 0
13) Präsektion	−	−	+	−	$p(X -< Y) = \dfrac{c}{a+b+c+d} = 1$	a+b+d = 0
14) Rejektion	−	−	−	+	$p(X \nabla Y) = \dfrac{d}{a+b+c+d} = 1$	a+b+c = 0

5-1-4-2 ÜBERSICHT ÜBER DIE RELATOREN, NULLISTISCH: p = 0

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		
1) Disjunktion	+	+	+	−	$p(X \vee Y) = \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 0$	a+b+c = 0
2) Replikation	+	+	−	+	$p(X \leftarrow Y) = \frac{a+b+d}{a+b+c+d} = 0$	a+b+d = 0
3) Präpension	+	+	−	−	$p(X \rfloor Y) = \frac{a+b}{a+b+c+d} = 0$	a+b = 0
4) Implikation	+	−	+	+	$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$	a+c+d = 0
5) Postpension	+	−	+	−	$p(X \lfloor Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d} = 0$	a+c = 0
6) Äquivalenz	+	−	−	+	$p(X \leftrightarrow Y) = \frac{a+d}{a+b+c+d} = 0$	a+d = 0
7) Konjunktion	+	−	−	−	$p(X \wedge Y) = \frac{a}{a+b+c+d} = 0$	a = 0
8) Exklusion	−	+	+	+	$p(X \mid Y) = \frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 0$	b+c+d = 0
9) Kontravalenz	−	+	+	−	$p(X >< Y) = \frac{b+c}{a+b+c+d} = 0$	b+c = 0
10) Postnonpension	−	+	−	+	$p(X \lceil Y) = \frac{b+d}{a+b+c+d} = 0$	b+d = 0
11) Postsektion	−	+	−	−	$p(X >- Y) = \frac{b}{a+b+c+d} = 0$	b = 0
12) Pränonpension	−	−	+	+	$p(X \rceil Y) = \frac{c+d}{a+b+c+d} = 0$	c+d = 0
13) Präsektion	−	−	+	−	$p(X -< Y) = \frac{c}{a+b+c+d} = 0$	c = 0
14) Rejektion	−	−	−	+	$p(X \nabla Y) = \frac{d}{a+b+c+d} = 0$	d = 0

5-1-5 Quantitative Quantoren-Logik

Wir unterscheiden:

1. All-Sätze	$p = 1$
2. Negative All-Sätze	$p = 0$
3. Partikulär-Sätze	$p > 0$
4. Negative Partikulär-Sätze	$p < 1$

Anstatt von „Sätzen“ kann man auch von „Relationen“ ausgehen.
Die Übersicht über All-Sätze ist hier verzichtbar, sie entspricht der aussagen-logischen Darstellung in 5-1-4-1, der Übersicht über die Relatoren bei $p = 1$. Ebenso ist die Übersicht über negative All-Sätze hier verzichtbar, sie entspricht der aussagen-logischen Darstellung in 5-1-4-2, der Übersicht über die Relatoren bei $p = 0$.

5-1-5-1 ÜBERSICHT ÜBER PARTIKULÄR-RELATIONEN (p > 0)

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		
1) Disjunktion	+	+	+	−	$p(X \vee Y) = \dfrac{a+b+c}{a+b+c+d} > 0$	a+b+c > 0
2) Replikation	+	+	−	+	$p(X \leftarrow Y) = \dfrac{a+b+d}{a+b+c+d} > 0$	a+b+d > 0
3) Präpension	+	+	−	−	$p(X \rfloor Y) = \dfrac{a+b}{a+b+c+d} > 0$	a+b > 0
4) Implikation	+	−	+	+	$p(X \rightarrow Y) = \dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$	a+c+d > 0
5) Postpension	+	−	+	−	$p(X \lfloor Y) = \dfrac{a+c}{a+b+c+d} > 0$	a+c > 0
6) Äquivalenz	+	−	−	+	$p(X \leftrightarrow Y) = \dfrac{a+d}{a+b+c+d} > 0$	a+d > 0
7) Konjunktion	+	−	−	−	$p(X \wedge Y) = \dfrac{a}{a+b+c+d} > 0$	a > 0
8) Exklusion	−	+	+	+	$p(X \mid Y) = \dfrac{b+c+d}{a+b+c+d} > 0$	b+c+d > 0
9) Kontravalenz	−	+	+	−	$p(X >< Y) = \dfrac{b+c}{a+b+c+d} > 0$	b+c > 0
10) Postnonpension	−	+	−	+	$p(X \lceil Y) = \dfrac{b+d}{a+b+c+d} > 0$	b+d > 0
11) Postsektion	−	+	−	−	$p(X >- Y) = \dfrac{b}{a+b+c+d} > 0$	b > 0
12) Pränonpension	−	−	+	+	$p(X \rceil Y) = \dfrac{c+d}{a+b+c+d} > 0$	c+d > 0
13) Präsektion	−	−	+	−	$p(X -< Y) = \dfrac{c}{a+b+c+d} > 0$	c > 0
14) Rejektion	−	−	−	+	$p(X \nabla Y) = \dfrac{d}{a+b+c+d} > 0$	d < 0

5-1-5-2 ÜBERSICHT ÜBER NEGATIVE PARTIKULÄR-RELATIONEN (p < 1)

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		
1) Disjunktion	+	+	+	−	$p(X \vee Y) = \frac{a+b+c}{a+b+c+d} < 1$	d > 0
2) Replikation	+	+	−	+	$p(X \leftarrow Y) = \frac{a+b+d}{a+b+c+d} < 1$	c > 0
3) Präpension	+	+	−	−	$p(X \rfloor Y) = \frac{a+b}{a+b+c+d} < 1$	c+d > 0
4) Implikation	+	−	+	+	$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$	b > 0
5) Postpension	+	−	+	−	$p(X \lfloor Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d} < 1$	b+d > 0
6) Äquivalenz	+	−	−	+	$p(X \leftrightarrow Y) = \frac{a+d}{a+b+c+d} < 1$	b+c > 0
7) Konjunktion	+	−	−	−	$p(X \wedge Y) = \frac{a}{a+b+c+d} < 1$	b+c+d > 0
8) Exklusion	−	+	+	+	$p(X \mid Y) = \frac{b+c+d}{a+b+c+d} < 1$	a > 0
9) Kontravalenz	−	+	+	−	$p(X >< Y) = \frac{b+c}{a+b+c+d} < 1$	a+d > 0
10) Postnonpension	−	+	−	+	$p(X \lceil Y) = \frac{b+d}{a+b+c+d} < 1$	a+c > 0
11) Postsektion	−	+	−	−	$p(X >- Y) = \frac{b}{a+b+c+d} < 1$	a +c+d > 0
12) Pränonpension	−	−	+	+	$p(X \rceil Y) = \frac{c+d}{a+b+c+d} < 1$	a+b > 0
13) Präsektion	−	−	+	−	$p(X -< Y) = \frac{c}{a+b+c+d} < 1$	a+b+d > 0
14) Rejektion	−	−	−	+	$p(X \nabla Y) = \frac{d}{a+b+c+d} < 1$	a+b+c > 0

5-1-5-3 MODELLE FÜR ALL- UND PARTIKULÄR-RELATIONEN

MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION

1. alle F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) = 1$		
2. alle F sind nicht G	$p(\neg(Fx \rightarrow Gx)) = 1$	oder	$p(Fx \rightarrow Gx) = 0$
3. einige F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) > 0$		
4. einige F sind nicht G	$p(\neg(Fx \rightarrow Gx)) > 0$	oder	$p(Fx \rightarrow Gx) < 1$

MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

1. alle F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) = 1$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow \neg Gx) = 1$
3. einige F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) > 0$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow \neg Gx) > 0$

MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

1. alle F sind G	$p(Fx \wedge Gx) = 1$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) = 1$
3. einige F sind G	$p(Fx \wedge Gx) > 0$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$

MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

1. alle F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) = 1$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow \neg Gx) = 1$
3. einige F sind G	$p(Fx \wedge Gx) > 0$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$

MODELL 5: POSITIV-IMPLIKATION UND NEG. POSITIV-IMPLIKATION

1. alle F sind G	$p(Fx \,{*}{\rightarrow}\, Gx) = 1$		
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \,{*}{\rightarrow}\, \neg Gx) = 1$	oder	$p(Fx \,{*}{\rightarrow}\, Gx) = 0$
3. einige F sind G	$p(Fx \,{*}{\rightarrow}\, Gx) > 0$		
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \,{*}{\rightarrow}\, \neg Gx) > 0$	oder	$p(Fx \,{*}{\rightarrow}\, Gx) < 1$

Bei der Positiv-Implikation gilt wie bereits dargestellt:

$$p(Fx \,{*}{\rightarrow}\, Gx) = 0 \;\Leftrightarrow\; p(Fx \,{*}{\rightarrow}\, \neg Gx) = 1$$

So kann man auch anders schreiben:

1. alle F sind G	$p(Fx \,{*}{\rightarrow}\, Gx) = 1$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \,{*}{\rightarrow}\, Gx) = 0$
3. einige F sind G	$p(Fx \,{*}{\rightarrow}\, Gx) > 0$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \,{*}{\rightarrow}\, Gx) < 1$

5 – 2 ANALYTISCHE RELATIONEN

5-2-1 AUSSAGEN-LOGIK

5-2-1-1 GESETZE DER IMPLIKATION

Wichtige Gesetze, eine Auswahl:

1 Variable:

Reflexivität	$X \Rightarrow X$	$++-- \Rightarrow ++--$ $(\Leftrightarrow)$
Reductio ad absurdum	$X \rightarrow \neg X \Rightarrow \neg X$	$--++ \Rightarrow --++$ $(\Leftrightarrow)$

2 Variablen:

Modus (ponendo) ponens Abtrennungs-Regel	$(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$	$+--- \Rightarrow +-+-$
Modus tollendo tollens	$(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg X$	$---+ \Rightarrow --++$
Simplifikations-Regel	$X \wedge Y \Rightarrow Y$	$+--- \Rightarrow +-+-$
Simplifikations-Regel	$X \leftrightarrow Y \Rightarrow X \rightarrow Y$	$+--+ \Rightarrow +-++$
Paradoxie	$\neg X \Rightarrow X \rightarrow Y$	$--++ \Rightarrow +-++$

3 Variablen:

Transitivität

$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \Rightarrow X \rightarrow Z$

$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow \neg Z) \Rightarrow X \rightarrow \neg Z$

$(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \Rightarrow X \leftrightarrow Z$

BEZIEHUNGEN ZWISCHEN IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

Es sind vor allem 4 Relationen zwischen Implikation und Positiv-Implikation zu untersuchen:

- $X *\!\rightarrow Y \quad *\!\Rightarrow \quad X \rightarrow Y$
- $X *\!\rightarrow Y \quad \Rightarrow \quad X \rightarrow Y$
- $X \rightarrow Y \quad *\!\longrightarrow \quad X *\!\rightarrow Y$
- $X \rightarrow Y \quad (\longrightarrow) \quad X *\!\rightarrow Y$

• Positiv-Schluss von der Positiv-Implikation auf die Implikation: $(X *\!\rightarrow Y) \quad *\!\Rightarrow \quad (X \rightarrow Y)$
Hier liegt eine streng analytische Positiv-Implikation, ein *strenger* Schluss vor. Denn außer dem + kommt nur das □ vor. Und in diesem Fall gilt die Relation als *tautologisch*.

(X	*→	Y)	*⇒	(X	→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	□	+	−	−
−	□	+	□	−	+	+
−	□	−	□	+	+	−

• Schluss von der Positiv-Implikation auf die Implikation : $(X *\!\rightarrow Y) \quad \Rightarrow \quad (X \rightarrow Y)$

(X	*→	Y)	⇒	(X	→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	+	+	−	−
−	□	+	+	−	+	+
−	□	−	+	+	+	−

Auch bei der Verwendung der normalen Implikation erhält man einen *vollständigen* Schluss Obwohl in der 3. und 4. Zeile ein □ unter dem $*\!\rightarrow$ steht (und die Implikation keine Deutung von □ beinhaltet), kann man ein + unter den Pfeil $\Rightarrow$ setzen, denn $\rightarrow$ + ergibt immer +.

• Positiv-Schluss von der Implikation auf die Positiv-Implikation:$(X \rightarrow Y) *\!\longrightarrow (X *\!\rightarrow Y)$

(X	→	Y)	*⟶	(X	*→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	□	+	−	−
−	+	+	?	−	□	+
−	+	−	?	+	□	−

Der Schluss von der Implikation auf die Positiv-Implikation mittels des Positiv-Implikators ist nur *partiell-analytisch*.

• Schluss von der Implikation auf die Positiv-Implikation $(X \rightarrow Y) \quad \longrightarrow \quad (X *\!\rightarrow Y)$?

(X	→	Y)	⟶	(X	*→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	+	+	−	−
−	+	+	∅	−	□	+
−	+	−	∅	+	□	−

Hier ist gar kein Schluss möglich. Denn wie die Wahrheitstafel oben zeigt: in der 3. und 4. Zeile steht links unter dem $\rightarrow$ ein + und rechts unter dem $*\!\rightarrow$ ein □. Die normale Implikation ist aber gar nicht für □ definiert, insofern ist kein Schluss möglich, hierfür wähle ich das Symbol $\varnothing$.

5-2-1-2 GESETZE DER REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Für die *Replikation* sind nicht viele Gesetze ausgewiesen, allerdings kann man die umgekehrten Gesetze der *Implikation* verwenden.

Gesetze der Replikation

$X \Leftarrow X$

$(X \leftarrow Y) \Leftarrow X$

$(X \leftarrow Y) \Leftarrow X \wedge Y$

$(X \vee Y) \Leftarrow X \wedge Y$

$X \Leftarrow (X \leftarrow Y) \wedge Y$

Für die *Äquivalenz* sind viele Gesetze ausgewiesen, hier nur eine kleine Auswahl:

Gesetze der Äquivalenz

Reflexivität der Äquivalenz	$X \Leftrightarrow X$
Definition der Äquivalenz	$(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y)$
Kontraposition Implikation	$X \rightarrow Y \Leftrightarrow (\neg X \leftarrow \neg Y)$
Kontraposition Äquivalenz	$X \leftrightarrow Y \Leftrightarrow (\neg X \leftrightarrow \neg Y)$
De Morgan	$X \wedge Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \vee \neg Y)$
Vertauschungsgesetz	$X \wedge Y \Leftrightarrow Y \wedge X$

'*de Morgan-Gesetze' (im Einzelnen)*

$X \vee Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y)$
$X \vee \neg Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge Y)$
$\neg X \vee Y \Leftrightarrow \neg(X \wedge \neg Y)$
$\neg X \vee \neg Y \Leftrightarrow \neg(X \wedge Y)$

$\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow \neg X \wedge \neg Y$
$\neg(X \vee \neg Y) \Leftrightarrow \neg X \wedge Y$
$\neg(\neg X \vee Y) \Leftrightarrow X \wedge \neg Y$
$\neg(\neg X \vee \neg Y) \Leftrightarrow X \wedge Y$

5-2-1-3 VOLLSTÄNDIGE TAUTOLOGIEN DER IMPLIKATION

MIT WAHRHEITSTAFELN

$\Rightarrow$

1.	− − − −	+ − − −	+ + − −	+ + + −	+ + + +
2.				+ + − +	
3.			+ − + −	+ + + −	
4.				+ − + +	
5.			+ − − +	+ + − +	
6.				+ − + +	
7.		− + − −	+ + − −	+ + + −	
8.				+ + − +	
9.			− + + −	+ + + −	
10.				− + + +	
11.			− + − +	+ + − +	
12.				− + + +	
13.		− − + −	+ − + −	+ + + −	
14.				+ − + +	
15.			− + + −	+ + + −	
16.				− + + +	
17.			− − + +	+ − + +	
18.				− + + +	
19.		− − − +	+ − − +	+ + − +	
20.				+ − + +	
21.			− + − +	+ + − +	
22.				− + + +	
23.			− − + +	+ − + +	
24.				− + + +	

Aus einer *Kontradiktion* folgt logisch *alles*: − − − − $\Rightarrow$ alles
Aus *allem* folgt logisch eine *Tautologie*: alles $\Rightarrow$ + + + +

MIT RELATIONEN

			$\Rightarrow$		
1.	X K Y	$X \wedge Y$	X	$X \vee Y$	X T Y
2.				$X \leftarrow Y$	
3.			Y	$X \vee Y$	
4.				$X \rightarrow Y$	
5.			$X \leftrightarrow Y$	$X \leftarrow Y$	
6.				$X \rightarrow Y$	
7.		$X \wedge \neg Y$	X	$X \vee Y$	
8.				$X \leftarrow Y$	
9.			X >< Y	$X \vee Y$	
10.				$X \mid Y$	
11.			$\neg Y$	$X \leftarrow Y$	
12.				$X \mid Y$	
13.		$\neg X \wedge Y$	Y	$X \vee Y$	
14.				$X \rightarrow Y$	
15.			X >< Y	$X \vee Y$	
16.				$X \mid Y$	
17.			$\neg X$	$X \rightarrow Y$	
18.				$X \mid Y$	
19.		$\neg X \wedge \neg Y$	$X \leftrightarrow Y$	$X \leftarrow Y$	
20.				$X \rightarrow Y$	
21.			$\neg Y$	$X \leftarrow Y$	
22.				$X \mid Y$	
23.			$\neg X$	$X \rightarrow Y$	
24.				$X \mid Y$	

Aus einer *Kontradiktion* folgt logisch *alles*: Kontradiktion $\Rightarrow$ alles
Aus *allem* folgt logisch eine *Tautologie*: alles $\Rightarrow$ Tautologie

Anders ist es bei der *Positiv-Implikation* $*\rightarrow$:
Hier ist aus einer Kontradiktion *nichts* abzuleiten, weil der Schluss völlig unbestimmt ist
Und es folgt auch nicht aus allem eine Tautologie, so folgt aus einer Kontradiktion *keine* Tautologie, weil auch dieser Schluss in allen Welten unbestimmt ist.

T = Tautologie
K = Kontradiktion

MODIFIZIERT

		$\Rightarrow$		$\Rightarrow$		$\Rightarrow$		$\Rightarrow$	
1.	$X\,K\,Y$		$X \wedge Y$		$X \rfloor Y$		$X \vee Y$		$X\,T\,Y$
2.							$X \leftarrow Y$		
3.					$X \lfloor Y$		$X \vee Y$		
4.							$X \rightarrow Y$		
5.					$X \leftrightarrow Y$		$X \leftarrow Y$		
6.							$X \rightarrow Y$		
7.			$X >\!- Y$		$X \rfloor Y$		$X \vee Y$		
8.							$X \leftarrow Y$		
9.					$X >\!< Y$		$X \vee Y$		
10.							$X \mid Y$		
11.					$X \lceil Y$		$X \leftarrow Y$		
12.							$X \mid Y$		
13.			$X -\!< Y$		$X \lfloor Y$		$X \vee Y$		
14.							$X \rightarrow Y$		
15.					$X >\!< Y$		$X \vee Y$		
16.							$X \mid Y$		
17.					$X \rceil Y$		$X \rightarrow Y$		
18.							$X \mid Y$		
19.			$X \nabla Y$		$X \leftrightarrow Y$		$X \leftarrow Y$		
20.							$X \rightarrow Y$		
21.					$X \lceil Y$		$X \leftarrow Y$		
22.							$X \mid Y$		
23.					$X \rceil Y$		$X \rightarrow Y$		
24.							$X \mid Y$		

Aus einer *Kontradiktion* folgt logisch *alles*: Kontradiktion $\Rightarrow$ alles
Aus *allem* folgt logisch eine *Tautologie*: alles $\Rightarrow$ Tautologie

T = Tautologie
K = Kontradiktion

NEGIERT (REPLIKATION)

$\Leftarrow$ $\Leftarrow$ $\Leftarrow$ $\Leftarrow$

1.	$\neg(X\ K\ Y)$	$\neg(X \wedge Y)$	$\neg(X \rfloor Y)$	$\neg(X \vee Y)$	$\neg(X\ T\ Y)$)
2.				$\neg(X \leftarrow Y)$	
3.			$\neg(X \lfloor Y)$	$\neg(X \vee Y)$	
4.				$\neg(X \rightarrow Y)$	
5.			$\neg(X \leftrightarrow Y)$	$\neg(X \leftarrow Y)$	
6.				$\neg(X \rightarrow Y)$	
7.		$\neg(X >\!- Y)$	$\neg(X \rfloor Y)$	$\neg(X \vee Y)$	
8.				$\neg(X \leftarrow Y)$	
9.			$\neg(X >< Y)$	$\neg(X \vee Y)$	
10.				$\neg(X \mid Y)$	
11.			$\neg(X \lceil Y)$	$\neg(X \leftarrow Y)$	
12.				$\neg(X \mid Y)$	
13.		$\neg(X -\!< Y)$	$\neg(X \lfloor Y)$	$\neg(X \vee Y)$	
14.				$\neg(X \rightarrow Y)$	
15.			$\neg(X >< Y)$	$\neg(X \vee Y)$	
16.				$\neg(X \mid Y)$	
17.			$\neg(X \rceil Y)$	$\neg(X \rightarrow Y)$	
18.				$\neg(X \mid Y)$	
19.		$\neg(X \nabla Y)$	$\neg(X \leftrightarrow Y)$	$\neg(X \leftarrow Y)$	
20.				$\neg(X \rightarrow Y)$	
21.			$\neg(X \lceil Y)$	$\neg(X \leftarrow Y)$	
22.				$\neg(X \mid Y)$	
23.			$\neg(X \rceil Y)$	$\neg(X \rightarrow Y)$	
24.				$\neg(X \mid Y)$	

Aus einer *Kontradiktion* folgt logisch *alles*: Kontradiktion $\Rightarrow$ alles
Aus *allem* folgt logisch eine *Tautologie*: alles $\Rightarrow$ Tautologie

T = Tautologie
K = Kontradiktion

5-2-1-4 ALLE (SEMI)ANALYTISCHEN VERBINDUNGEN VON →

		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
	→	T	∨	←	⌋	→	⌊	↔	∧	|	><	⌈	>–	⌉	–<	∇	K
1.	T	T	∨	←	⌋	→	⌊	↔	∧	|	><	⌈	>–	⌉	–<	∇	K
2.	∨	T	T	←	←	→	→	↔	↔	|	|	⌈	⌈	⌉	⌉	∇	∇
3.	←	T	∨	T	∨	→	⌊	→	⌊	|	><	|	><	⌉	–<	⌉	–<
4.	⌋	T	T	T	T	→	→	→	→	|	|	|	|	⌉	⌉	⌉	⌉
5.	→	T	∨	←	⌋	T	∨	←	⌋	|	><	⌈	–<	|	><	⌈	–<
6.	⌊	T	T	←	←	T	T	←	←	|	|	⌈	⌈	><	><	⌈	⌈
7.	↔	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨	|	><	|	><	|	><	|	><
8.	∧	T	T	T	T	T	T	T	T	|	|	|	|	|	|	|	|
9.	|	T	∨	←	⌋	→	⌊	↔	∧	T	∨	←	⌋	→	⌊	↔	∧
10.	><	T	T	←	←	→	→	↔	↔	T	T	←	←	→	→	↔	↔
11.	⌈	T	∨	T	∨	→	⌊	→	⌊	T	∨	T	∨	→	⌊	→	⌊
12.	>–	T	T	T	T	→	→	→	→	T	T	T	T	→	→	→	→
13.	⌉	T	∨	←	⌋	T	∨	←	⌋	T	∨	←	⌋	T	∨	←	⌋
14.	–<	T	T	←	←	T	T	←	←	T	T	←	←	T	T	←	←
15.	∇	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨
16.	K	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

Diese Tabelle gibt alle analytischen oder semi-analytischen möglichen *Implikationen* an.
Die Relation in der Tabelle gibt dann an, welchem Relator (welcher synthetischen Relation) die Implikation entspricht: T = Tautologie, K = Kontradiktion.
Diese Tabelle ist folgendermaßen zu lesen (erst linke Nummer, dann rechte Nummer):
z. B. 2. 3. $[(X \vee Y) \longrightarrow (X \leftarrow Y)] \Leftrightarrow (X \leftarrow Y)$
z. B. 7.15. $[(X \leftrightarrow Y) \longrightarrow (X \nabla Y)] \Leftrightarrow (X \mid Y)$
Es ist interessant, wie viele Symmetrien die Tabelle enthält.

ALLE (SEMI)ANALYTISCHEN VERBINDUNGEN VON ∨:

		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
	∨	T	∨	←	⌋	→	⌊	↔	∧	|	><	⌈	>–	⌉	–<	∇	K
1.	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
2.	∨	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨
3.	←	T	T	←	←	T	T	←	←	T	T	←	←	T	T	←	←
4.	⌋	T	∨	←	⌋	T	∨	←	⌋	T	∨	←	⌋	T	∨	←	⌋
5.	→	T	T	T	T	→	→	→	→	T	T	T	T	→	→	→	→
6.	⌊	T	∨	T	∨	→	⌊	→	⌊	T	∨	T	∨	→	⌊	→	⌊
7.	↔	T	T	←	←	→	→	↔	↔	T	T	←	←	→	→	↔	↔
8.	∧	T	∨	←	⌋	→	⌊	↔	∧	T	∨	←	⌋	→	⌊	↔	∧
9.	|	T	T	T	T	T	T	T	T	|	|	|	|	|	|	|	|
10.	><	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨	|	><	|	><	|	><	|	><
11.	⌈	T	T	←	←	T	T	←	←	|	|	⌈	⌈	|	|	⌈	⌈
12.	>–	T	∨	←	⌋	T	∨	←	⌋	|	><	⌈	>–	|	><	⌈	>–
13.	⌉	T	T	T	T	→	→	→	→	|	|	|	|	⌉	⌉	⌉	⌉
14.	–<	T	∨	T	∨	→	⌊	→	⌊	|	><	|	><	⌉	–<	⌉	–<
15.	∇	T	T	←	←	→	→	↔	↔	|	|	⌈	⌈	⌉	⌉	∇	∇
16.	K	T	∨	←	⌋	→	⌊	↔	∧	|	><	⌈	>–	⌉	–<	∇	K

ALLE (SEMI)ANALYTISCHEN VERBINDUNGEN VON ↔:

		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
	↔	T	∨	←	⌋	→	⌊	↔	∧	|	><	⌈	>–	⌉	–<	∇	K
1.	T	T	∨	←	⌋	→	⌊	↔	∧	|	><	⌈	>–	⌉	–<	∇	K
2.	∨	∨	T	⌋	←	⌊	→	∧	↔	><	|	>–	⌈	–<	⌉	K	∇
3.	←	←	⌋	T	∨	↔	∧	→	⌊	⌈	>–	|	><	∇	K	⌉	–<
4.	⌋	⌋	←	∨	T	∧	↔	⌊	→	>–	⌈	><	|	K	∇	–<	⌉
5.	→	→	⌊	↔	∧	T	∨	←	⌋	–<	–<	∇	K	|	><	⌈	>–
6.	⌊	⌊	→	∧	↔	∨	T	⌋	←	–<	⌉	K	∇	><	|	>–	⌈
7.	↔	↔	∧	→	⌊	←	⌋	T	∨	∇	K	⌉	–<	⌈	>–	|	><
8.	∧	∧	↔	⌊	→	⌋	←	∨	T	K	∇	–<	⌉	>–	⌈	><	|
9.	|	|	><	⌈	>–	⌉	–<	∇	K	T	∨	←	⌋	→	⌊	↔	∧
10.	><	><	|	>–	⌈	–<	⌉	K	∇	∨	T	⌋	←	⌊	→	∧	↔
11.	⌈	⌈	>–	|	><	∇	K	⌉	–<	←	⌋	T	∨	↔	∧	→	⌊
12.	>–	>–	⌈	><	|	K	∇	–<	⌉	⌋	←	∨	T	∧	↔	⌊	→
13.	⌉	⌉	–<	∇	K	|	><	⌈	>–	→	⌊	↔	∧	T	∨	←	⌋
14.	–<	–<	⌉	K	∇	><	|	>–	⌈	⌊	→	∧	↔	∨	T	⌋	←
15.	∇	∇	K	⌉	–<	⌈	>–	|	><	↔	∧	→	⌊	←	⌋	T	∨
16.	K	K	∇	–<	⌉	>–	⌈	><	|	∧	↔	⌊	→	⌋	←	∨	T

Diese Tabellen lesen sich entsprechend wie die vorherigen der Implikation.

5-2-1-5 LOGISCHES QUADRAT UND GEGENSATZ

Man kann Beziehungen zwischen bestimmten Relatoren durch das *logische Quadrat* angeben.

$$\begin{array}{ccc}
X \wedge Y & {}^{+}|^{+} & X \nabla Y \\[2em]
\Downarrow & {}^{+}{><}^{+} & \Downarrow \\[2em]
X \vee Y & {}^{+}\vee^{+} & X \mid Y
\end{array}$$

Vor allem lassen sich auf diese Weise *Gegensätze* darstellen, nach ihrer Stärke geordnet:

Kontradiktorisch	$X >< Y$:	entweder ist X gültig oder Y
Konträr	$X \mid Y$:	X und Y sind nicht beide gültig
Subkonträr	$X \vee Y$:	X und Y sind nicht beide ungültig
Subaltern	$X \rightarrow Y$:	wenn X gültig ist, dann auch Y

Man könnte zwar auch *synthetische* Gegensätze definieren (entsprechend den oben genannten Relatoren), aber normalerweise versteht man in der Logik die Gegensätze als *analytisch*; insofern kommen die analytischen Versionen der Relatoren zum Einsatz: ${}^{*}{><}^{+}$ ${}^{+}|^{+}$ ${}^{+}\vee^{+}$ $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Konträr} & & \\[1em]
 & X \wedge Y & {}^{+}|^{+} & X \nabla Y & \\[1em]
 & & \text{kontra-} & & \\
\text{subaltern} & \Downarrow & {}^{+}{><}^{+} & \Downarrow & \text{subaltern} \\
 & & \text{diktorisch} & & \\[1em]
 & X \vee Y & {}^{+}\vee^{+} & X \mid Y & \\[1em]
 & & \text{subkonträr} & &
\end{array}$$

Zur besseren Übersicht die einzelnen Gegensatz-Relationen des Quadrats gelistet:

$X \wedge Y$ ${}^{+}{><}^{+}$ $X \mid Y$ kontradiktorisch
$X \nabla Y$ ${}^{+}{><}^{+}$ $X \vee Y$

$X \wedge Y$ ${}^{+}|^{+}$ $X \nabla Y$ konträr

$X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$ subaltern
$X \nabla Y \Rightarrow X \mid Y$

$X \vee Y$ ${}^{+}\vee^{+}$ $X \mid Y$ subkonträr

5-2-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

5-2-2-1 LOGISCHES QUADRAT

Normale Sprache

alle	$^{+}\vert^{+}$	alle nicht
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
einige	$^{+}\vee^{+}$	einige nicht

Einfache Relationen: Quantoren-Logik

$\Lambda x(Fx)$	$^{+}\vert^{+}$	$\Lambda x\neg(Fx)$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
$Vx(Fx)$	$^{+}\vee^{+}$	$Vx\neg(Fx)$

Einfache Relationen: Prädikaten-Logik

$Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n$	$^{+}\vert^{+}$	$\neg Fx_1 \wedge \ldots \wedge \neg Fx_n$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
$Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$	$^{+}\vee^{+}$	$\neg Fx_1 \vee \ldots \vee \neg Fx_n$

Komplexe Relationen: Quantoren-Logik

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$^{+}\vert^{+}$	$\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
$Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$^{+}\vee^{+}$	$Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$

Das Zeichen $^{+}{>}{<}^{+}$ in der Mitte bezieht sich auf *beide* Diagonalen.
(Die Quadratform ist nicht exakt eingehalten, um die Abbildungen nicht zu groß zu machen.)

5-2-2-2 GESETZE

• einfache Relationen

Äquivalenzen

$\Lambda x(Fx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx\neg(Fx)$
$\Lambda x\neg(Fx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx(Fx)$
$\neg\Lambda x(Fx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx\neg(Fx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx(Fx)$

Schlüsse (die aus den Äquivalenzen folgen, eine Auswahl)

$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$\neg Vx\neg(Fx)$
$\Lambda x\neg(Fx)$	$\Rightarrow$	$\neg Vx(Fx)$
$\neg\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx\neg(Fx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$

Schlüsse (die nicht aus den Äquivalenzen folgen)

$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$
$\neg\Lambda x(Fx)$	$\Leftarrow$	$\neg Vx(Fx)$
$\Lambda x\neg(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx\neg(Fx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx)$	$\Leftarrow$	$\neg Vx\neg(Fx)$

• komplexe Relationen

Äquivalenzen

$\Lambda x(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx\neg(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
$\Lambda x\neg(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx\neg(Fx \wedge \neg Gx)$
$\neg\Lambda x(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx\neg(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx\neg(Fx \wedge \neg Gx)$

Schlüsse (die aus den Äquivalenzen folgen, eine Auswahl)

$\Lambda x(Fx \to Gx)$	$\Rightarrow$	$\neg Vx\neg(Fx \to Gx)$
$\Lambda x\neg(Fx \to Gx)$	$\Rightarrow$	$\neg Vx(Fx \to Gx)$
$\neg\Lambda x(Fx \to Gx)$	$\Rightarrow$	$Vx\neg(Fx \to Gx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx \to Gx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx \to Gx)$

Schlüsse (die nicht aus den Äquivalenzen folgen)

$\Lambda x(Fx \to Gx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx \to Gx)$
$\neg\Lambda x(Fx \to Gx)$	$\Leftarrow$	$\neg Vx(Fx \to Gx)$
$\Lambda x\neg(Fx \to Gx)$	$\Rightarrow$	$Vx\neg(Fx \to Gx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx \to Gx)$	$\Leftarrow$	$\neg Vx\neg(Fx \to Gx)$

Durch Verwendung einer spezifischen *Individuen-Konstante* x_i sind zusätzlich z. B. folgende Schlüsse möglich:

$\Lambda x(Fx) \Rightarrow Fx_i$

$\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow \neg Fx_i$

$Fx_i \Rightarrow Vx(Fx)$

$\neg Fx_i \Rightarrow Vx\neg(Fx)$

5-2-2-3 ALL-IMPLIKATIONEN

		⇒	⇒	⇒	
1.	Λ (X K Y)	Λ (X ∧ Y)	Λ (X ⌋ Y)	Λ (X ∨ Y)	Λ (X T Y))
2.				Λ (X ← Y)	
3.			Λ (X ⌊ Y)	Λ (X ∨ Y)	
4.				Λ (X → Y)	
5.			Λ (X ↔ Y)	Λ (X ← Y)	
6.				Λ (X → Y)	
7.		Λ (X >– Y)	Λ (X ⌋ Y)	Λ (X ∨ Y)	
8.				Λ (X ← Y)	
9.			Λ (X >< Y)	Λ (X ∨ Y)	
10.				Λ (X ∣ Y)	
11.			Λ (X ⌈ Y)	Λ (X ← Y)	
12.				Λ (X ∣ Y)	
13.		Λ (X –< Y)	Λ (X ⌊ Y)	Λ (X ∨ Y)	
14.				Λ (X → Y)	
15.			Λ (X >< Y)	Λ (X ∨ Y)	
16.				Λ (X ∣ Y)	
17.			Λ (X ⌉ Y)	Λ (X → Y)	
18.				Λ (X ∣ Y)	
19.		Λ (X ∇ Y)	Λ (X ↔ Y)	Λ (X ← Y)	
20.				Λ (X → Y)	
21.			Λ (X ⌈ Y)	Λ (X ← Y)	
22.				Λ (X ∣ Y)	
23.			Λ (X ⌉ Y)	Λ (X → Y)	
24.				Λ (X ∣ Y)	

5-2-2-4 MODAL- UND HYPER-LOGIK

Man kann auf der *Quantoren-Logik* eine *Modal-Logik* bzw. andere Logiken aufbauen. Dabei zeigt sich, dass sich Unterschiede z. B. zwischen *notwendig* und *möglich* rein quantitativ auffassen lassen, nämlich dem Unterschied zwischen *alle* und *einige* entsprechen.

Zur Orientierung über die logischen Beziehungen sei das *logische Quadrat* dargestellt:

alle	$^{+}|^{+}$	alle ¬
⇓	$^{+}{>}{<}^{+}$	⇓
einige	$^{+}\vee^{+}$	einige ¬

	ALLE ¬EINIGE¬	¬ALLE¬ EINIGE	¬ALLE EINIGE¬	ALLE¬ ¬EINIGE
1) MODALITÄT				
1.Alethisch	Notwendig	¬Notwendig¬	¬Notwendig	Notwendig¬
	¬Möglich¬	Möglich	Möglich¬	¬Möglich
	Unmöglich¬	*¬Unmöglich*	*¬Unmöglich¬*	*UNMÖGLICH*
2.Normativ	Müssen	(¬Müssen¬)	(¬Müssen)	Müssen¬
	(¬Dürfen¬)	Dürfen	Dürfen¬	(¬Dürfen)
3.Deontisch	Geboten	¬Geboten¬	¬Geboten	Geboten¬
	¬Erlaubt¬	Erlaubt	Erlaubt¬	¬Erlaubt
	Verboten¬	*¬Verboten*	*¬Verboten¬*	*VERBOTEN*
2) Sonstige				
1.Zeit	Immer	¬Immer¬	¬Immer	Immer¬
	¬Manchmal¬	Manchmal	Manchmal¬	¬Manchmal
	Niemals¬	*¬Niemals*	*¬Niemals¬*	*NIEMALS*
2.Ort	Überall	¬Überall¬	¬Überall	Überall¬
	¬Mancherorts¬	Mancherorts	Mancherorts¬	¬Mancherorts
	Nirgends¬	*¬Nirgends*	*¬Nirgends¬*	*NIRGENDS*

Jede Logik beruht primär auf 2 Operatoren, z. B. „notwendig“ und „möglich“. Es gibt aber immer einen dritten abgeleiteten Operator, hier „unmöglich“. Der wird *kursiv* geschrieben bzw. in seiner Normalform GROSS.

5-2-3 Quantitative Logik

5-2-3-1 SCHLÜSSE

Die Schlüsse gelten auch für die *Positiv-Implikation* $*\rightarrow$ bzw. $*\Rightarrow$.

SCHLÜSSE MIT UNGLEICHUNGEN

1. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq r/n$
2. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq r/n$
3. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq (n-r)/n$
4. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq (n-r)/n$

1. $\underline{p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq r/n}$

Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) nur *partiell* analytisch sind, aber Umkehrungen von vollständigen Schlüssen sind.
Z. B.: $X \vee Y \longrightarrow Y$ oder $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$
Die gültigen Welten der Konklusion sind eine Teilmenge der gültigen Welten der Prämisse.

- $p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$
- $p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n$

2. $\underline{p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq r/n}$

Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) *streng* analytisch sind. Die gültigen Welten der Prämisse sind eine Teilmenge der gültigen Welten der Konklusion.

- $p(Y) = r/n \Rightarrow p(X \vee Y) \geq r/n$
- $p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(X \vee Y) \geq r/n$

3. $\underline{p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq (n-r)/n}$

Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) *partiell* analytisch sind. Dabei schneiden sich die Mengen der gültigen Welten von Prämisse und Konklusion.

- $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(X \leftarrow Y) \geq (n-r)/n$
- $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(\neg Y) \geq (n-r)/n$

4. $\underline{p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq (n-r)/n}$

Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) *partiell* analytisch sind. Dabei sind Prämisse und Konklusion in keiner Welt gemeinsam gültig.

- $p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge \neg Y) \leq (n-r)/n$
- $p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(X \nabla Y) \leq (n-r)/n$

5-2-3-2 GLEICHUNGEN

1. *Negation*
$p(\Phi) = r/n \Leftrightarrow p\neg(\Phi) = 1 - r/n.$ $\quad p\neg(\Phi) =_{df} p(\Psi)$
$p(\Phi) = r/n \Leftrightarrow p(\Psi) = 1 - r/n$
$p(\Phi) = 1 - p(\Psi)$ bzw. $p(\Psi) = 1 - p(\Phi)$ bzw. $p(\Phi) + p(\Psi) = 1$

2. *Addition*
$p(\Phi_1) + p(\Phi_2) = p(\Psi)$
Beispiel: $p(X \wedge Y) + p(X \nabla Y) = p(X \leftrightarrow Y)$
$p(\Phi_1) + p(\Phi_2) + ... + p(\Phi_n) = p(\Psi)$
Beispiel: $p(X \wedge Y) + p(X -< Y) + p(X \nabla Y) = p(X \rightarrow Y)$

3. Subtraktion
$p(\Phi_1) - p(\Phi_2) = p(\Psi)$
Beispiel: $p(X >< Y) - p(X -< Y) = p(X >- Y)$

$p(\Phi_1) - p(\Phi_2) - ... - p(\Phi_n) = p(\Psi)$
Beispiel: $p(X \vee Y) - (p(X -< Y) - p(X >- Y) = p(X \wedge Y)$

4. *Kombiniert*
Beispiel (Konjunktion): $p(X \rightarrow Y) + p(X \leftarrow Y) - 1 = p(X \leftrightarrow Y)$

Qualitativ: $(X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y) \Leftrightarrow X \leftrightarrow Y$

Beispiel (Disjunktion): $p(X >< Y) + p(X \mid Y) = p(X \mid Y)$

Qualitativ : $(X >< Y) \vee p(X \mid Y) \Leftrightarrow p(X \mid Y)$

(Hier muss man in der quantitativen Formel die *doppelten* Variablen bzw. Buchstaben streichen.)

5-2-3-3 TABELLE: (POSITIV-)SCHLUSS $p(X \wedge Y) = r/n$ $*\!\longrightarrow$ $p(X\ R\ Y) = s/n$
Prämisse = Konjunktion $\wedge$. Relation R = $\rfloor$, $\rightarrow$, >– u. ä. Für n = 1 bis n = 4
z. B. $p(X \wedge Y) = 0/3$, dann kann $p(X \rightarrow Y)$ folgende Werte annehmen: 3/3, 2/3, 1/3, 0/3

n	$p(X \wedge Y)$	$\longrightarrow$ $*\!\longrightarrow$	$p(X) =$ $p(X \rfloor Y)$	$p(X \rightarrow Y)$	$p(X >\!\!- Y)$
	$\frac{a}{a+b+c+d}$		$\frac{a+b}{a+b+c+d}$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	$\frac{b}{a+b+c+d}$
1	1/1		1/1	1/1	0/1
	0/1		1/1	1/1	1/1
			0/1	0/1	0/1
2	2/2		2/2	2/2	0/2
	1/2		2/2	2/2	1/2
			1/2	1/2	0/2
	0/2		2/2	2/2	2/2
			1/2	1/2	1/2
			0/2	0/2	0/2
3	3/3		3/3	3/3	0/3
	2/3		3/3	3/3	1/3
			2/3	2/3	0/3
	1/3		3/3	3/3	2/3
			2/3	2/3	1/3
			1/3	1/3	0/3
	0/3		3/3	3/3	3/3
			2/3	2/3	2/3
			1/3	1/3	1/3
			0/3	0/3	0/3
4	4/4		4/4	4/4	0/4
	3/4		4/4	4/4	1/4
			3/4	3/4	0/4
	2/4		4/4	4/4	2/4
			3/4	3/4	1/4
			2/4	2/4	0/4
	1/4		4/4	4/4	3/4
			3/4	3/4	2/4
			2/4	2/4	1/4
			1/4	1/4	0/4
	0/4		4/4	4/4	4/4
			3/4	3/4	3/4
			2/4	2/4	2/4
			1/4	1/4	1/4
			0/4	0/4	0/4

5-2-3-4 TABELLE: (POSITIV-)SCHLUSS p(X → Y) = r/n *⟶ p(X R Y) = s/n
Prämisse = Implikation →. Relation R = ∧, ←, ↔ u. ä. Für n = 1 bis n = 4
z. B. p(X → Y) = 2/3, dann kann p(X ∧ Y) folgende Werte annehmen: 2/3, 1/3, 0/3

n	p(X → Y)	⟶ *⟶	p(X) = p(X ⌋ Y)	p(X ← Y)	p(X ↔ Y)	p(X ∧ Y)
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a+b}{a+b+c+d}$	$\frac{a+b+d}{a+b+c+d}$	$\frac{a+d}{a+b+c+d}$	$\frac{a}{a+b+c+d}$
1	1/1		1/1	1/1	1/1	1/1
			0/1	0/1	0/1	0/1
	0/1		1/1	1/1	0/1	0/1
2	2/2		2/2	2/2	2/2	2/2
			1/2	1/2	1/2	1/2
			0/2	0/2	0/2	0/2
	1/2		2/2	2/2	1/2	1/2
			1/2	1/2	0/2	0/2
	0/2		2/2	2/2	0/2	0/2
3	3/3		3/3	3/3	3/3	3/3
			2/3	2/3	2/3	2/3
			1/3	1/3	1/3	1/3
			0/3	0/3	0/3	0/3
	2/3		3/3	3/3	2/3	2/3
			2/3	2/3	1/3	1/3
			1/3	1/3	0/3	0/3
	1/3		3/3	3/3	1/3	1/3
			2/3	2/3	0/3	0/3
	0/3		3/3	3/3	0/3	0/3
4	4/4		4/4	4/4	4/4	4/4
			3/4	3/4	3/4	3/4
			2/4	2/4	2/4	2/4
			1/4	1/4	1/4	1/4
			0/4	0/4	0/4	0/4
	3/4		4/4	4/4	3/4	3/4
			3/4	3/4	2/4	2/4
			2/4	2/4	1/4	1/4
			1/4	1/4	0/4	0/4
	2/4		4/4	4/4	2/4	2/4
			3/4	3/4	1/4	1/4
			2/4	2/4	0/4	0/4
	1/4		4/4	4/4	1/4	1/4
			3/4	3/4	0/4	0/4
	0/4		4/4	4/4	0/4	0/4

5-2-4 Quantitative Aussagen-Logik

5-2-4-1 TAUTOLOGIEN DER IMPLIKATION - DETERMINISTISCH

		$\Rightarrow$		$\Rightarrow$	
1.	$p(X \wedge Y) = 1$		$p(X \rfloor Y) = 1$		$p(X \vee Y) = 1$
2.					$p(X \leftarrow Y) = 1$
3.			$p(X \lfloor Y) = 1$		$p(X \vee Y) = 1$
4.					$p(X \rightarrow Y) = 1$
5.			$p(X \leftrightarrow Y) = 1$		$p(X \leftarrow Y) = 1$
6.					$p(X \rightarrow Y) = 1$
7.	$p(X >- Y) = 1$		$p(X \rfloor Y) = 1$		$p(X \vee Y) = 1$
8.					$p(X \leftarrow Y) = 1$
9.			$p(X >< Y) = 1$		$p(X \vee Y) = 1$
10.					$p(X \mid Y) = 1$
11.			$p(X \lceil Y) = 1$		$p(X \leftarrow Y) = 1$
12.					$p(X \mid Y) = 1$
13.	$p(X -< Y) = 1$		$p(X \lfloor Y) = 1$		$p(X \vee Y) = 1$
14.					$p(X \rightarrow Y) = 1$
15.			$p(X >< Y) = 1$		$p(X \vee Y) = 1$
16.					$p(X \mid Y) = 1$
17.			$p(X \rceil Y) = 1$		$p(X \rightarrow Y) = 1$
18.					$p(X \mid Y) = 1$
19.	$p(X \nabla Y) = 1$		$p(X \leftrightarrow Y) = 1$		$p(X \leftarrow Y) = 1$
20.					$p(X \rightarrow Y) = 1$
21.			$p(X \lceil Y) = 1$		$p(X \leftarrow Y) = 1$
22.					$p(X \mid Y) = 1$
23.			$p(X \rceil Y) = 1$		$p(X \rightarrow Y) = 1$
24.					$p(X \mid Y) = 1$

5-2-4-2 TAUTOLOGIEN DER IMPLIKATION - NULLISTISCH

		$\Leftarrow$		$\Leftarrow$	
1.	$p(X \wedge Y) = 0$		$p(X \rfloor Y) = 0$		$p(X \vee Y) = 0$
2.					$p(X \leftarrow Y) = 0$
3.			$p(X \lfloor Y) = 0$		$p(X \vee Y) = 0$
4.					$p(X \rightarrow Y) = 0$
5.			$p(X \leftrightarrow Y) = 0$		$p(X \leftarrow Y) = 0$
6.					$p(X \rightarrow Y) = 0$
7.	$p(X >\!- Y) = 0$		$p(X \rfloor Y) = 0$		$p(X \vee Y) = 0$
8.					$p(X \leftarrow Y) = 0$
9.			$p(X >< Y) = 0$		$p(X \vee Y) = 0$
10.					$p(X \mid Y) = 0$
10.			$p(X \lceil Y) = 0$		$p(X \leftarrow Y) = 0$
12.					$p(X \mid Y) = 0$
13.	$p(X -\!< Y) = 0$		$p(X \lfloor Y) = 0$		$p(X \vee Y) = 0$
14.					$p(X \rightarrow Y) = 0$
15.			$p(X >< Y) = 0$		$p(X \vee Y) = 0$
16.					$p(X \mid Y) = 0$
17.			$p(X \rceil Y) = 0$		$p(X \rightarrow Y) = 0$
18.					$p(X \mid Y) = 0$
19.	$p(X \nabla Y) = 0$		$p(X \leftrightarrow Y) = 0$		$p(X \leftarrow Y) = 0$
20.					$p(X \rightarrow Y) = 0$
21.			$p(X \lceil Y) = 0$		$p(X \leftarrow Y) = 0$
22.					$p(X \mid Y) = 0$
23.			$p(X \rceil Y) = 0$		$p(X \rightarrow Y) = 0$
24.					$p(X \mid Y) = 0$

5-2-5 Quantitative Quantoren-Logik

5-2-5-1 LOGISCHES QUADRAT

Einfache Relationen

$$\begin{array}{ccc} p(Fx) = 1 & {}^{+}|^{+} & p(Fx) = 0 \\ \Downarrow & {}^{+}\!\!><\!\!{}^{+} & \Downarrow \\ p(Fx) > 0 & {}^{+}\!\vee^{+} & p(Fx) < 1 \end{array}$$

Komplexe Relationen

$$\begin{array}{ccc} p(Fx \rightarrow Gx) = 1 & {}^{+}|^{+} & p(Fx \rightarrow Gx) = 0 \\ \Downarrow & {}^{+}\!\!><\!\!{}^{+} & \Downarrow \\ p(Fx \rightarrow Gx) > 0 & {}^{+}\!\vee^{+} & p(Fx \rightarrow Gx) < 1 \end{array}$$

5-2-5-2 PARTIKULÄR-SÄTZE

Die oben in 5-2-4-1/5-2-4-2 genannten *Tautologien* können für folgende All-Strukturen stehen:

$p = 1$: für alle gilt
$p = 0$: für alle gilt nicht

Die hier folgenden Tautologien stehen für:

$p < 1$: nicht für alle gilt / für einige gilt nicht
$p > 0$: nicht für alle gilt nicht / für einige gilt

z. B. 6. Zeile: (für einige gilt: $X \wedge Y$) $\Rightarrow$ (für einige gilt: $X \leftrightarrow Y$) $\Rightarrow$ (für einige gilt: $X \rightarrow Y$)

		$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
1.	$p(X \wedge Y) > 0$	$p(X \rfloor Y) > 0$	$p(X \vee Y) > 0$
2.			$p(X \leftarrow Y) > 0$
3.		$p(X \lfloor Y) > 0$	$p(X \vee Y) > 0$
4.			$p(X \rightarrow Y) > 0$
5.		$p(X \leftrightarrow Y) > 0$	$p(X \leftarrow Y) > 0$
6.			$p(X \rightarrow Y) > 0$
7.	$p(X >\!- Y) > 0$	$p(X \rfloor Y) > 0$	$p(X \vee Y) > 0$
8.			$p(X \leftarrow Y) > 0$
9.		$p(X >< Y) > 0$	$p(X \vee Y) > 0$
10.			$p(X \mid Y) > 0$
10.		$p(X \lceil Y) > 0$	$p(X \leftarrow Y) > 0$
12.			$p(X \mid Y) > 0$
13.	$p(X -\!< Y) > 0$	$p(X \lfloor Y) > 0$	$p(X \vee Y) > 0$
14.			$p(X \rightarrow Y) > 0$
15.		$p(X >< Y) > 0$	$p(X \vee Y) > 0$
16.			$p(X \mid Y) > 0$
17.		$p(X \rceil Y) > 0$	$p(X \rightarrow Y) > 0$
18.			$p(X \mid Y) > 0$
19.	$p(X \nabla Y) > 0$	$p(X \leftrightarrow Y) > 0$	$p(X \leftarrow Y) > 0$
20.			$p(X \rightarrow Y) > 0$
21.		$p(X \lceil Y) > 0$	$p(X \leftarrow Y) > 0$
22.			$p(X \mid Y) > 0$
23.		$p(X \rceil Y) > 0$	$p(X \rightarrow Y) > 0$
24.			$p(X \mid Y) > 0$

5-2-5-3 NEGATIVE PARTIKULÄR-SÄTZE

z. B. (1. Zeile) : $p(X \wedge Y) < 1 \;\Leftarrow\; p(X \rfloor Y) < 1 \;\Leftarrow\; p(X \vee Y) < 1$

	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	
1.	$p(X \wedge Y) < 1$	$p(X \rfloor Y) < 1$	$p(X \vee Y) < 1$
2.			$p(X \leftarrow Y) < 1$
3.		$p(X \lfloor Y) < 1$	$p(X \vee Y) < 1$
4.			$p(X \rightarrow Y) < 1$
5.		$p(X \leftrightarrow Y) < 1$	$p(X \leftarrow Y) < 1$
6.			$p(X \rightarrow Y) < 1$
7.	$p(X >\!- Y) < 1$	$p(X \rfloor Y) < 1$	$p(X \vee Y) < 1$
8.			$p(X \leftarrow Y) < 1$
9.		$p(X >< Y) < 1$	$p(X \vee Y) < 1$
10.			$p(X \mid Y) < 1$
11.		$p(X \lceil Y) < 1$	$p(X \leftarrow Y) < 1$
12.			$p(X \mid Y) < 1$
13.	$p(X -\!< Y) < 1$	$p(X \lfloor Y) < 1$	$p(X \vee Y) < 1$
14.			$p(X \rightarrow Y) < 1$
15.		$p(X >< Y) < 1$	$p(X \vee Y) < 1$
16.			$p(X \mid Y) < 1$
17.		$p(X \rceil Y) < 1$	$p(X \rightarrow Y) < 1$
18.			$p(X \mid Y) < 1$
19.	$p(X \nabla Y) < 1$	$p(X \leftrightarrow Y) < 1$	$p(X \leftarrow Y) < 1$
20.			$p(X \rightarrow Y) < 1$
21.		$p(X \lceil Y) < 1$	$p(X \leftarrow Y) < 1$
22.			$p(X \mid Y) < 1$
23.		$p(X \rceil Y) < 1$	$p(X \rightarrow Y) < 1$
24.			$p(X \mid Y) < 1$

5 – 3 META-LOGIK SYNTHETISCHER RELATIONEN

5-3-1 Aussagen-Logik

5-3-1-1 THEORETISCHE WAHRSCHEINLICHKEIT DER RELATOREN

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		p^T
1) Tautologie	+	+	+	+	$X \top Y$	4/4 = 1
2) Disjunktion	+	+	+	–	$X \vee Y$	3/4 = 0,75
3) Replikation	+	+	–	+	$X \leftarrow Y$	3/4 = 0,75
4) Präpension	+	+	–	–	$X \rfloor Y$	2/4 = 0,5
5) Implikation	+	–	+	+	$X \rightarrow Y$	3/4 = 0,75
6) Postpension	+	–	+	–	$X \lfloor Y$	2/4 = 0,5
7) Äquivalenz	+	–	–	+	$X \leftrightarrow Y$	2/4 = 0,5
8) Konjunktion	+	–	–	–	$X \wedge Y$	1/4 = 0,25
9) Exklusion	–	+	+	+	$X \mid Y$	3/4 = 0,75
10) Kontravalenz	–	+	+	–	$X >< Y$	2/4 = 0,5
11) Postnonpension	–	+	–	+	$X \lceil Y$	2/4 = 0,5
12) Postsektion	–	+	–	–	$X >- Y$	1/4 = 0,25
13) Pränonpension	–	–	+	+	$X \rceil Y$	2/4 = 0,5
14) Präsektion	–	–	+	–	$X -< Y$	1/4 = 0,25
15) Rejektion	–	–	–	+	$X \nabla Y$	1/4 = 0,25
16) Antilogie	–	–	–	–	$X \perp Y$	0/4 = 0

5-3-1-2 RELATOREN NACH p^T GEORDNET

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		p^T
1) Tautologie	+	+	+	+	$X \top Y$	4/4 = 1
2) Disjunktion	+	+	+	–	$X \vee Y$	3/4 = 0,75
3) Replikation	+	+	–	+	$X \leftarrow Y$	3/4 = 0,75
4) Implikation	+	–	+	+	$X \rightarrow Y$	3/4 = 0,75
5) Exklusion	–	+	+	+	$X \mid Y$	3/4 = 0,75
6) Präpension	+	+	–	–	$X \rfloor Y$	2/4 = 0,5
7) Postpension	+	–	+	–	$X \lfloor Y$	2/4 = 0,5
8) Äquivalenz	+	–	–	+	$X \leftrightarrow Y$	2/4 = 0,5
9) Kontravalenz	–	+	+	–	$X >< Y$	2/4 = 0,5
10) Postnonpension	–	+	–	+	$X \lceil Y$	2/4 = 0,5
11) Pränonpension	–	–	+	+	$X \rceil Y$	2/4 = 0,5
12) Konjunktion	+	–	–	–	$X \wedge Y$	1/4 = 0,25
13) Postsektion	–	+	–	–	$X >- Y$	1/4 = 0,25
14) Präsektion	–	–	+	–	$X -< Y$	1/4 = 0,25
15) Rejektion	–	–	–	+	$X \nabla Y$	1/4 = 0,25
16) Antilogie	–	–	–	–	$X \perp Y$	0/4 = 0

5-3-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

5-3-2-1 MODELLE FÜR ALL- UND PARTIKULÄR-RELATIONEN

alle:	n/n	vereinfacht:	alle:	n
alle nicht:	0/n		alle nicht:	0
einige:	> 0/n		einige:	> 0
einige nicht:	< n/n		einige nicht:	< n

		p^T
MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION		
1. alle F sind G	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$3^n/4^n$
2. alle F sind nicht G	$\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$	$1/4^n$
3. einige F sind G	$Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$(4^n - 1)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$	$(4^n - 3^n)/4^n$
MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION		
1. alle F sind G	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$3^n/4^n$
2. alle F sind nicht G	$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$	$3^n/4^n$
3. einige F sind G	$Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$(4^n - 1)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$Vx (Fx \rightarrow \neg Gx)$	$(4^n - 1)/4^n$
MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION		
1. alle F sind G	$\Lambda x(Fx \wedge Gx)$	$1/4^n$
2. alle F sind nicht G	$\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx)$	$1/4^n$
3. einige F sind G	$Vx(Fx \wedge Gx)$	$(4^n - 3^n)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$Vx(Fx \wedge \neg Gx)$	$(4^n - 3^n)/4^n$
MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION		
1. alle F sind G	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$3^n/4^n$
2. alle F sind nicht G	$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$	$3^n/4^n$
3. einige F sind G	$Vx(Fx \wedge Gx)$	$(4^n - 3^n)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$Vx(Fx \wedge \neg Gx)$	$(4^n - 3^n)/4^n$
MODELL 5: (NEGATIVE) POSITIV-IMPLIKATION		
1. alle F sind G	$\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx)$	$1/2^n$
2. alle F sind nicht G	$\Lambda x(Fx *\!\rightarrow \neg Gx)$	$1/2^n$
3. einige F sind G	$Vx(Fx *\!\rightarrow Gx)$	$(2^n - 1)/2^n$
4. einige F sind nicht G	$Vx(Fx *\!\rightarrow \neg Gx)$	$(2^n - 1)/2^n$

5-3-2-2 p^T VON ALL- UND PARTIKULÄR-RELATIONEN

alle: n/n, alle nicht: 0/n, einige: > 0/n, einige nicht: < n/n
genau einige: > 0/n $\wedge$ < n/n, genau einige nicht: > 0/n $\wedge$ < n/n

Unterschiedliche Formalisierungen

	$\mathbf{p^T}$	$\mathbf{p^T}$
1. alle F sind G		
$\Lambda x(Fx \to Gx)$	$3^n/4^n$	$1 - [(4^n - 3^n)/4^n]$
$\Lambda x(Fx *\!\!\to Gx)$	$1/2^n$	$1 - [(2^n - 1)/2^n]$
2. alle F sind nicht G		
$\Lambda x(Fx \to \neg Gx)$	$3^n/4^n$	$1 - [(4^n - 3^n)/4^n]$
$\Lambda x\neg(Fx \to Gx)$	$1/4^n$	$1 - [(4^n - 1)/4^n]$
$\Lambda x(Fx *\!\!\to \neg Gx)$	$1/2^n$	$1 - [(2^n - 1)/2^n]$
$\Lambda x\neg(Fx *\!\!\to Gx)$	$1/2^n$	$1 - [(2^n - 1)/2^n]$
3. einige F sind G		
$Vx(Fx \to Gx)$	$(4^n - 1)/4^n$	$1 - [1/4^n]$
$Vx(Fx *\!\!\to Gx)$	$(2^n - 1)/2^n$	$1 - [1/2^n]$
$Vx(Fx \wedge Gx)$	$(4^n - 3^n)/4^n$	$1 - [3/4^n]$
4. einige F sind nicht G		
$Vx(Fx \to \neg Gx)$	$(4^n - 1)/4^n$	$(4^n - 1)/4^n$
$Vx\neg(Fx \to Gx)$	$(4^n - 3^n)/4^n$	$1 - [3/4^n]$
$Vx(Fx *\!\!\to \neg Gx)$	$(2^n - 1)/2^n$	$1 - [1/2^n]$
$Vx\neg(Fx *\!\!\to Gx)$	$(2^n - 1)/2^n$	$1 - [1/2^n]$
$Vx(Fx \wedge \neg Gx)$	$(4^n - 3^n)/4^n$	$1 - [3/4^n]$
5. genau einige F sind G		
$\exists x(Fx \to Gx)$	$(4^n - 3^n - 1)/4^n$	
$\exists x(Fx *\!\!\to Gx)$	$(2^n - 2)/2^n$	
$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$(4^n - 3^n - 1)/4^n$	

(bei „genau einige nicht“ ergeben sich dieselben Werte wie für „genau einige“)

5-3-2-3 STATISTISCHE VERTEILUNG MIT 3 INDIVIDUEN x, y, z (n = 3)

Man könnte diese und die folgende Darstellung auch bei *quantitativer Logik* anstatt *Prädikaten-Logik* einordnen.

	X∧Y	X∧¬Y	¬X∧Y	¬X∧¬Y	p^T
	+ +	+ −	+ −	+ +	
	a	b	c	d	
1.	x,y,z				1/64
2.	x,y	z			1/64
3	x,z	y			1/64
4.	y,z	x			1/64
5.	x	y,z			1/64
6.	y	x,z			1/64
7.	z	x,y			1/64
8.		x,y,z			1/64
9.	x,y		z		1/64
10.	x,z		y		1/64
11.	y,z		x		1/64
12.	x,y			z	1/64
13.	x,z			y	1/64
14.	y,z			x	1/64
15.	x	y	z		1/64
16.	x	z	y		1/64
17.	y	x	z		1/64
18.	y	z	x		1/64
19.	z	x	y		1/64
20.	z	y	x		1/64
21.	x	y		z	1/64
22.	x	z		y	1/64
23.	y	x		z	1/64
24.	y	z		x	1/64
25.	z	x		y	1/64
26.	z	y		x	1/64
27.		x,y			1/64
28.		x,z			1/64
29.		y,z			1/64
30.		x,y		z	1/64
31.		x,z		y	1/64
32.		y,z		x	1/64
33	x		y,z		1/64
34	y		x,z		1/64
35	z		x,y		1/64
36	x		y	z	1/64
37	x		z	y	1/64
38	y		x	z	1/64
39	y		z	x	1/64
40	z		x	y	1/64
41	z		y	x	1/64

42	x			y,z	1/64
43	y			x,z	1/64
44	z			x,y	1/64
45		x	y,z		1/64
46		y	x,z		1/64
47		z	x,y		1/64
48		x	y	z	1/64
49		x	z	y	1/64
50		y	x	z	1/64
51		y	z	x	1/64
52		z	x	y	1/64
53		z	y	x	1/64
54		x		y,z	1/64
55		y		x,z	1/64
56		z		x,y	1/64
57			x,y,z		1/64
58			x,y	z	1/64
59			x,z	y	1/64
60			y,z	x	1/64
61			x	y,z	1/64
62			y	x,z	1/64
63			z	x,y	1/64
64				x,y,z	1/64
					64/64

5-3-2-4 STATISTISCHE VERTEILUNG, NUMERISCHE DARSTELLUNG (n = 3)

Nr.	X∧Y	X∧¬Y	¬X∧Y	¬X∧¬Y	p^T
	+ +	+ −	− +	− −	
	a	b	c	d	
1.	3				1/64
2.	2	1			1/64
3	2	1			1/64
4.	2	1			1/64
5.	1	2			1/64
6.	1	2			1/64
7.	1	2			1/64
8.		3			1/64
9.	2		1		1/64
10.	2		1		1/64
11.	2		1		1/64
12.	2			1	1/64
13.	2			1	1/64
14.	2			1	1/64
15.	1	1	1		1/64
16.	1	1	1		1/64
17.	1	1	1		1/64
18.	1	1	1		1/64
19.	1	1	1		1/64
20.	1	1	1		1/64
21.	1	1		1	1/64
22.	1	1		1	1/64
23.	1	1		1	1/64
24.	1	1		1	1/64
25.	1	1		1	1/64
26.	1	1		1	1/64
27.		2	1		1/64
28.		2	1		1/64
29.		2	1		1/64
30.		2		1	1/64
31.		2		1	1/64
32.		2		1	1/64
33.	1		2		1/64
34.	1		2		1/64
35.	1		2		1/64
36.	1		1	1	1/64
37.	1		1	1	1/64
38.	1		1	1	1/64
39.	1		1	1	1/64
40.	1		1	1	1/64
41.	1		1	1	1/64
42.	1			2	1/64
43.	1			2	1/64
44.	1			2	1/64

45.		1	2		1/64
46.		1	2		1/64
47.		1	2		1/64
48.		1	1	1	1/64
49.		1	1	1	1/64
50.		1	1	1	1/64
51.		1	1	1	1/64
52.		1	1	1	1/64
53.		1	1	1	1/64
54.		1		2	1/64
55.		1		2	1/64
56.		1		2	1/64
57.			3		1/64
58.			2	1	1/64
59.			2	1	1/64
60.			2	1	1/64
61.			1	2	1/64
62.			1	2	1/64
63.			1	2	1/64
64.				3	1/64
	48	48	48	48	64/64

5-3-2-5 STATISTISCHE VERTEILUNG, ZUSAMMENFASSUNG (n = 3)

Nr.	X∧Y	X∧¬Y	¬X∧Y	¬X∧¬Y	p^T
	a	b	c	d	
1)	3	0	0	0	1/64
2)	2	1	0	0	3/64
3)	1	2	0	0	3/64
4)	0	3	0	0	1/64
5)	2	0	1	0	3/64
6)	2	0	0	1	3/64
7)	1	1	1	0	6/64
8)	1	1	0	1	6/64
9)	0	2	1	0	3/64
10)	0	2	0	1	3/64
11)	1	0	2	0	3/64
12)	1	0	1	1	6/64
13)	1	0	0	2	3/64
14)	0	1	2	0	3/64
15)	0	1	1	1	6/64
16)	0	1	0	2	3/64
17)	0	0	3	0	1/64
18)	0	0	2	1	3/64
19)	0	0	1	2	3/64
20)	0	0	0	3	1/64
					64/64

5-3-3 Quantitative Logik

5-3-3-1 p^T SYNTHETISCHER RELATIONEN DES TYPS „IMPLIKATION“
Implikation →, Replikation ←, Disjunktion ∨, Exklusion | . Für n = 1 bis n = 8
z. B. die 1. Zeile ist für die Implikation → zu lesen: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 1/1] = 3/4 = 0{,}75 = 75\%$

Variablen n	Objekt-Werte p Zähler	Nenner	Meta-Werte p^T Zähler	Nenner	Meta-Werte dezimal	Meta-Werte % (genauer)
1	1	1	3	4	0,75	75,00 %
	0	1	1	4	0,25	25,00 %
2	2	2	9	16	0,56	56,20 %
	1	2	6	16	0,38	37,50 %
	0	2	1	16	0,06	6,25 %
3	3	3	27	64	0,42	42,19 %
	2	3	27	64	0,42	42,19 %
	1	3	9	64	0,14	14,06 %
	0	3	1	64	0,02	1,56 %
4	4	4	81	256	0,32	32,64 %
	3	4	108	256	0,42	42,19 %
	2	4	54	256	0,21	21,09 %
	1	4	12	256	0,05	4,69 %
	0	4	1	256	≈ 0	0,39 %
5	5	5	243	1024	0,24	23,73 %
	4	5	405	1024	0,40	39,55 %
	3	5	270	1024	0,26	26,37 %
	2	5	90	1024	0,09	8,79 %
	1	5	15	1024	0,01	1,46 %
	0	5	1	1024	≈ 0	0,10 %
6	6	6	729	4096	0,18	17,80 %
	5	6	1558	4096	0,38	38,04 %
	4	6	1215	4096	0,30	29,66 %
	3	6	540	4096	0,13	13,18 %
	2	6	135	4096	0,03	3,30 %
	1	6	18	4096	≈ 0	0,44 %
	0	6	1	4096	≈ 0	0,02 %
7	7	7	2187	16384	0,13	13,35 %
	6	7	5103	16384	0,31	31,15 %
	5	7	5103	16384	0,31	31,15 %
	4	7	2835	16384	0,17	17,30 %
	3	7	945	16384	0,06	5,77 %
	2	7	189	16384	0,01	1,15 %
	1	7	21	16384	≈ 0	0,13 %
	0	7	1	16384	≈ 0	0,01 %
8	8	8	6561	65536	0,10	10,01 %
	7	8	17496	65536	0,27	26,70 %
	6	8	20412	65536	0,31	31,13 %
	5	8	13608	65536	0,21	20,76 %
	4	8	5607	65536	0,09	8,56 %
	3	8	1512	65536	0,02	2,31 %
	2	8	252	65536	≈ 0	0,38 %
	1	8	24	65536	≈ 0	0,04 %
	0	8	1	65536	≈ 0	≈ 0 %

5-3-3-2 p^T SYNTHETISCHER RELATIONEN DES TYPS „KONJUNKTION“
für Konjunktion $\wedge$, Präsektion $-<$, Postsektion $>-$, Rejektion ∇ . Für n = 1 bis n = 8
z. B. die 1. Zeile ist für die Konjunktion $\wedge$ zu lesen: $p^T[p(X \wedge Y) = 1/1] = 1/4 = 0{,}25 = 25\%$

Variablen n	Objekt-Werte p Zähler	Nenner	Meta-Werte p^T Zähler	Nenner	Meta-Werte Dezimal	Meta-Werte % (genauer)
1	1	1	1	4	0,25	25,00 %
	0	1	3	4	0,75	75,00 %
2	2	2	1	16	0,06	6,25 %
	1	2	6	16	0,38	37,50 %
	0	2	9	16	0,56	56,20 %
3	3	3	1	64	0,02	1,56 %
	2	3	9	64	0,14	14,06 %
	1	3	27	64	0,42	42,19 %
	0	3	27	64	0,42	42,19 %
4	4	4	1	256	≈ 0	0,39 %
	3	4	12	256	0,05	4,69 %
	2	4	54	256	0,21	21,09 %
	1	4	108	256	0,42	42,19 %
	0	4	81	256	0,32	32,64 %
5	5	5	1	1024	≈ 0	0,10 %
	4	5	15	1024	0,01	1,46 %
	3	5	90	1024	0,09	8,79 %
	2	5	270	1024	0.26	26,37 %
	1	5	405	1024	0,40	39,55 %
	0	5	243	1024	0,24	23,73 %
6	6	6	1	4096	≈ 0	0,02 %
	5	6	18	4096	≈ 0	0,44 %
	4	6	135	4096	0,03	3,30 %
	3	6	540	4096	0,13	13,18 %
	2	6	1215	4096	0,30	29,66 %
	1	6	1558	4096	0,38	38,04 %
	0	6	729	4096	0,18	17,80%
7	7	7	1	16384	≈ 0	0,01 %
	6	7	21	16384	≈ 0	0,13 %
	5	7	189	16384	0,01	1,15 %
	4	7	945	16384	0,06	5,77 %
	3	7	2835	16384	0,17	17,30 %
	2	7	5103	16384	0,31	31,15 %
	1	7	5103	16384	0,31	31,15 %
	0	7	2187	16384	0,13	13,35 %
8	8	8	1	65536	≈ 0	≈ 0 %
	7	8	24	65536	≈ 0	0,04 %
	6	8	252	65536	≈ 0	0,38 %
	5	8	1512	65536	0,02	2,31 %
	4	8	5607	65536	0,09	8,56 %
	3	8	13608	65536	0,21	20,76 %
	2	8	20412	65536	0,31	31,13 %
	1	8	17496	65536	0,27	26,70 %
	0	8	6561	65536	0,10	10,01 %

5-3-3-3 p^T SYNTHETISCHER RELATIONEN DES TYPS „ÄQUIVALENZ“
für Äquivalenz ↔, Kontravalenz >< (und andere Gleichgewichts-Relatoren). Für n= 1 bis n=8 z. B. die 1. Zeile ist für die Äquivalenz ↔ zu lesen: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 1/1] = 1/2 = 0{,}50 = 50\%$

Variablen n	Objekt-Werte p Zähler	Nenner	Meta-Werte p^T Zähler	Nenner	p^T gekürzt Zähler	Nenner	p^T dez.	p^T prozent.
1	1	1	2	4	1	2	0,50	50,00 %
	0	1	2	4	1	2	0,50	50,00 %
2	2	2	4	16	1	4	0,25	25,00 %
	1	2	8	16	2	4	0,50	50,00 %
	0	2	4	16	1	4	0,25	25,00 %
3	3	3	8	64	1	8	0,13	12,50 %
	2	3	24	64	3	8	0,38	37,50 %
	1	3	24	64	3	8	0,38	37,50 %
	0	3	8	64	1	8	0,13	12,50 %
4	4	4	16	256	1	16	0,06	6,25 %
	3	4	64	256	4	16	0,25	25,00 %
	2	4	96	256	6	16	0,38	37,50 %
	1	4	64	256	4	16	0,25	25,00 %
	0	4	16	256	1	16	0,06	6,25 %
5	5	5	32	1024	1	32	0,03	3,13 %
	4	5	160	1024	5	32	0,16	15,63 %
	3	5	320	1024	10	32	0,31	31,25 %
	2	5	320	1024	10	32	0,31	31,25 %
	1	5	160	1024	5	32	0,16	15,63 %
	0	5	32	1024	1	32	0,03	3,13 %
6	6	6	64	4096	1	64	0,02	1,56 %
	5	6	384	4096	6	64	0,09	9,38 %
	4	6	960	4096	15	64	0,23	23,44 %
	3	6	1280	4096	20	64	0,31	31,25 %
	2	6	960	4096	15	64	0,23	23,44 %
	1	6	384	4096	6	64	0,09	9,38 %
	0	6	64	4096	1	64	0,02	1,56 %
7	7	7	128	16384	1	128	0,01	0,78 %
	6	7	896	16384	7	128	0,06	5,47 %
	5	7	2688	16384	21	128	0,16	16,41 %
	4	7	4480	16384	35	128	0,27	27,34 %
	3	7	4480	16384	35	128	0,27	27,34 %
	2	7	2688	16384	21	128	0,16	16,41 %
	1	7	896	16384	7	128	0,06	5,47 %
	0	7	128	16384	1	128	0,01	0,78 %
8	8	8	256	65536	1	256	≈ 0	0,39 %
	7	8	2048	65536	8	256	0,03	3,13 %
	6	8	7168	65536	28	256	0,11	10,94 %
	5	8	14336	65536	56	256	0,22	21,88 %
	4	8	17920	65536	70	256	0,27	27,34 %
	3	8	14336	65536	56	256	0,22	21,88 %
	2	8	7168	65536	28	256	0,11	10,94 %
	1	8	2048	65536	8	256	0,03	3,13 %
	0	8	256	65536	1	256	≈ 0	0,39 %

p^T DER POSITIV-IMPLIKATION
Sie entspricht ebenfalls dem Typ „Äquivalenz".
X *→ Y, X *→ ¬Y, ¬(X *→ Y) usw. Für n = 1 bis n = 8
z. B. die 1. Zeile ist für die *→ zu lesen: p^T[p(X *→ Y) = 1/1] = 1/2 = 0,50 = 50%

Variablen n	Objekt-Werte p Zähler	Nenner	Meta-Werte p^T Zähler	Nenner	p^T dez.	p^T prozent.
1	1	1	1	2	0,50	50,00 %
	0	1	1	2	0,50	50,00 %
2	2	2	1	4	0,25	25,00 %
	1	2	2	4	0,50	50,00 %
	0	2	1	4	0,25	25,00 %
3	3	3	1	8	0,13	12,50 %
	2	3	3	8	0,38	37,50 %
	1	3	3	8	0,38	37,50 %
	0	3	1	8	0,13	12,50 %
4	4	4	1	16	0,06	6,25 %
	3	4	4	16	0,25	25,00 %
	2	4	6	16	0,38	37,50 %
	1	4	4	16	0,25	25,00 %
	0	4	1	16	0,06	6,25 %
5	5	5	1	32	0,03	3,13 %
	4	5	5	32	0,16	15,63 %
	3	5	10	32	0,31	31,25 %
	2	5	10	32	0,31	31,25 %
	1	5	5	32	0,16	15,63 %
	0	5	1	32	0,03	3,13 %
6	6	6	1	64	0,02	1,56 %
	5	6	6	64	0,09	9,38 %
	4	6	15	64	0,23	23,44 %
	3	6	20	64	0,31	31,25 %
	2	6	15	64	0,23	23,44 %
	1	6	6	64	0,09	9,38 %
	0	6	1	64	0,02	1,56 %
7	7	7	1	128	0,01	0,78 %
	6	7	7	128	0,06	5,47 %
	5	7	21	128	0,16	16,41 %
	4	7	35	128	0,27	27,34 %
	3	7	35	128	0,27	27,34 %
	2	7	21	128	0,16	16,41 %
	1	7	7	128	0,06	5,47 %
	0	7	1	128	0,01	0,78 %
8	8	8	1	256	≈ 0	0,39 %
	7	8	8	256	0,03	3,13 %
	6	8	28	256	0,11	10,94 %
	5	8	56	256	0,22	21,88 %
	4	8	70	256	0,27	27,34 %
	3	8	56	256	0,22	21,88 %
	2	8	28	256	0,11	10,94 %
	1	8	8	256	0,03	3,13 %
	0	8	1	256	≈ 0	0,39 %

5-3-3-4 FORMELN ZUR BERECHNUNG VON p^T

Hier geht es um *quantitative* Relationen, der Form p(Φ R Ψ) = r/n

semi-tautologische Relationen:	p^T(Struktur) > 0,5	z. B. p(X → Y) = r/n
semi-kontradiktorische Relationen:	p^T(Struktur) < 0,5	z. B. p(X ∧ Y) = r/n
neutrale Relationen:	p^T(Struktur) = 0,5	z. B. p(X ↔ Y) = r/n

Dabei kommen 3 Formeln zum Einsatz:

1) *semi-tautologische Relationen*: $p^T = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$

Für folgende Relatoren bzw. Relationen, jeweils in quantitativer Form, z. B. p(X → Y) = r/n

- X → Y
- X ← Y
- X ∨ Y
- X | Y

2) *semi-kontradiktorische* Relationen: $p^T = \binom{n}{r}(1/4)^r(3/4)^{n-r}$

- X ∧ Y
- X >– Y
- X –< Y
- X ∇ Y

3) *neutrale* Relationen: $p^T = \binom{n}{r}(1/2)^r(1/2)^{n-r}$

- X ↔ Y
- X >< Y
- X ⌋ Y
- X ⌊ Y
- X ⌉ Y
- X ⌈ Y

Diese Formel gilt auch für die Positiv-*Implikation* X *→ Y.
Wenn man die Parallele zu den anderen Formeln betonen will, kann man hier statt 1/2 auch 2/4 einsetzen.

Ausgesuchte Relationen im Detail:

- semi-tautologisch $p(X \to Y) = r/n$ $p^T = \binom{n}{r}(3/4)^r (1/4)^{n-r}$

$$p = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

- logisch neutral $p(X \leftrightarrow Y) = r/n$ $p^T = \binom{n}{r}(1/2)^r (1/2)^{n-r}$

$$p = \frac{a+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

- semi-kontradiktorisch $p(X \wedge Y) = r/n$ $p^T = \binom{n}{r}(1/4)^r (3/4)^{n-r}$

$$p = \frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

5-3-3-5 TABELLE $p^T[p(\neg X *\rightarrow Y) = r/n \wedge p(X *\rightarrow Y) = s/n]$

	p(¬X*→Y)	p^T	∧	p(X*→Y)	p^T	Produkt	p^T ∧	Summe	dezimal
1)	4/4 = 1	1/16		4/4	1/16	1/16•1/16	1/256		≈0,00
				3/4	4/16	1/16•4/16	4/256		0,02
				2/4	6/16	1/16•6/16	6/256		0,02
				1/4	4/16	1/16•4/16	4/256		0,02
				0/4	1/16	1/16•1/16	1/256		≈0,00
								16/256	
2)	3/4 = 0,75	4/16		4/4	1/16	4/16•1/16	4/256		0,02
				3/4	4/16	4/16•4/16	16/256		0,06
				2/4	6/16	4/16•6/16	24/256		0,09
				1/4	4/16	4/16•4/16	16/256		0,06
				0/4	1/16	4/16•1/16	4/256		0,02
								64/256	
3)	2/4 = 0,5	6/16		4/4	1/16	6/16•1/16	6/256		0,02
				3/4	4/16	6/16•4/16	24/256		0,09
				2/4	6/16	6/16•6/16	36/256		0,14
				1/4	4/16	6/16•4/16	24/256		0,09
				0/4	1/16	6/16•1/16	6/256		0,02
								96/256	
4)	1/4 = 0,25	4/16		4/4	1/16	4/16•1/16	4/256		0,02
				3/4	4/16	4/16•4/16	16/256		0,06
				2/4	6/16	4/16•6/16	24/256		0,09
				1/4	4/16	4/16•4/16	16/256		0,06
				0/4	1/16	4/16•1/16	4/256		0,02
								64/256	
5)	0/4 = 0	1/16		4/4	1/16	1/16•1/16	1/256		≈0,00
				3/4	4/16	1/16•4/16	4/256		0,02
				2/4	6/16	1/16•6/16	6/256		0,02
				1/4	4/16	1/16•4/16	4/256		0,02
				0/4	1/16	1/16•1/16	1/256		≈0,00
								16/256	
							256/256	256/256	

Keine der 5 *kombinierten* Verteilungen von p(¬X *→ Y) und p(X *→ Y) stimmt (wie man oben sieht) in den p^T-Werten mit der *isolierten* Verteilung p(X *→ Y) überein.

Man könnte meinen, dass p(¬X *→ Y) und p(X *→ Y) logisch voneinander *abhängig* sind, weil in ihnen die *gleichen* Variablen X und Y vorkommen. Wie aber die folgenden Brüche zeigen (in denen nur *unterschiedliche* Variablen vorkommen), sind die Relationen völlig *unabhängig*, d. h. in jeder Weise kombinierbar.

$$p(\neg X *\rightarrow Y) = \frac{c}{c+d} \qquad p(X *\rightarrow Y) = \frac{a}{a+b}$$

Daher lässt sich der p^T- Wert der Konjunktion durch *Multiplikation* berechnen.

$$p^T[p(\neg X *\rightarrow Y) \wedge p(X *\rightarrow Y)] = p^T[p(\neg X *\rightarrow Y)] \bullet p^T[p(X *\rightarrow Y)]$$

Das zeigt die obige Tabelle für n = 4

Die folgende Tabelle gibt an, was diese Kombinationen von p(¬X *→ Y) und p(X *→ Y) über die (empirische) *Abhängigkeit von X und Y* aussagen.

ABHÄNGIGKEIT VON Y ZU X BEI p(X * → Y) UND p(¬X *→ Y)

p(¬X *→ Y) = ?	p(X *→ Y)	p dez.	Abhängigkeit von Y zu X	p^T
	4/4	1,0	größte positive Abhängigkeit	1/16
	3/4	0,75	mittlere positive Abhängigkeit	4/16
	2/4	0,5	keine Abhängigkeit	6/16
	1/4	0,25	mittlere negative Abhängigkeit	4/16
	0/4	0,0	größte negative Abhängigkeit	1/16

p(¬X *→ Y) = 0	p(X *→ Y)	p dez.	Abhängigkeit von Y zu X	p^T
	4/4	1,0	größte positive Abhängigkeit	1/256
	3/4	0,75	große positive Abhängigkeit	4/256
	2/4	0,5	mittlere positive Abhängigkeit	6/256
	1/4	0,25	geringe positive Abhängigkeit	4/256
	0/4	0,0	keine Abhängigkeit	1/256

p(¬X *→ Y) = 1	p(X *→ Y)	p dez.	Abhängigkeit von Y zu X	p^T
	4/4	1,0	keine Abhängigkeit	1/256
	3/4	0,75	geringe negative Abhängigkeit	4/256
	2/4	0,5	mittlere negative Abhängigkeit	6/256
	1/4	0,25	große negative Abhängigkeit	4/256
	0/4	0,0	größte negative Abhängigkeit	1/256

p(¬X *→ Y) = 0,5	p(X *→ Y)	p dez.	Abhängigkeit von Y zu X	p^T
	4/4	1,0	mittlere positive Abhängigkeit	6/256
	3/4	0,75	geringe positive Abhängigkeit	24/256
	2/4	0,5	keine Abhängigkeit	36/256
	1/4	0,25	geringe negative Abhängigkeit	24/256
	0/4	0,0	mittlere negative Abhängigkeit	6/256

p(¬X *→ Y)	p(X *→ Y)	p dez.	Abhängigkeit von Y zu X	p^T
0/4	4/4	1,0	größte positive Abhängigkeit	1/256
1/4	3/4	0,75	mittlere positive Abhängigkeit	16/256
2/4	2/4	0,5	keine Abhängigkeit	36/256
3/4	1/4	0,25	mittlere negative Abhängigkeit	16/256
4/4	0/4	0,0	größte negative Abhängigkeit	1/256

In der 1. (obersten) Kolonne ist p(¬X *→ Y) *nicht definiert*, es bleibt unberücksichtigt.

In der 2. – 4. Kolonne besitzt p(¬X *→ Y) einen *bestimmten* Wert, nämlich 0, 1 und 0,5. (immer bezogen auf den Nenner n = 4, obwohl das nicht entscheidend ist)

In der 5. (untersten) Kolonne besitzt p(¬X *→ Y) *variable* Werte, und zwar den Umkehrwert zu p(X *→ Y), so dass gilt: p(¬X *→ Y) + p(X *→ Y) = 1. Bei dieser Wertezuschreibung für p(¬X *→ Y) ergeben sich dieselben Abhängigkeitsstrukturen wie in der 1. Kolonne. (Allerdings sind die p^T-Werte unterschiedlich.)

5-3-3-6 ÜBERSICHT: META-WERTE DER IMPLIKATION

1) IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION

A) qualitativ	$X \to Y$	$\neg(X \to Y)$
1. theoret. Wahrsch.	$p^T = 3/4$	$p^T = 1/4$
2. Tautologie-Grad	$p^T = 3/4$	$p^T = 1/4$
3. Informationsgehalt	$p^I = 1/4$	$p^I = 3/4$
4. Bestimmtheit	$p^B = 1/3$	$p^B = 1/1$
5. Abhängigkeit	$p^A = 1/1 = 1$	$p^A = 1/1 = 1$

B) quantitativ (z. B.)		$p(X \to Y) = 4/4$	$p(X \to Y) = 2/4$	$p(X \to Y) = 0/4$
1. theoret. Wahrsch.	$p^T =$	81/256	54/256	1/256
2. Tautologie-Grad	$p^T =$	81/256	54/256	1/256
3. Informationsgehalt	$p^I =$	175/256	202/256	255/256
4. Bestimmtheit	$p^B =$	1/81	1/54	1/1 = 1
5. Abhängigkeit	$p^A =$	4/4 = 1	0/4 = 0	4/4 = 1

Anmerkungen
- Die Berechnungen der Werte sind im Text erläutert.
- Den Tautologie-Grad könnte man auch mit w^T angeben, für theoretische Wahrheit. Der Einheitlichkeit halber verwende ich aber immer ‚p', das allgemein für *relative Größe* steht, z. B. p^B für relative Größe der Bestimmtheit.
- Bei „qualitativ" könnte man noch angeben:
  implizite Wahrscheinlichkeit von $X \to Y$: $p = 1$
  implizite Wahrscheinlichkeit von $\neg(X \to Y)$: $p = 0$
- Für synthetische Relationen ist nur eine *synthetische* Abhängigkeit definiert.
- Es gibt verschiedene Modelle zur Berechnung der *Abhängigkeit* (vgl. im Text).
  Hier wird wie folgt berechnet:
  Qualitativ:
  $p^A\ [X \to Y] = |1/1 - 0/1| = 1$ positive Abhängigkeit
  $p^A\ [\neg(X \to Y)] = |0/1 - 1/1| = 1$ negative Abhängigkeit

  Quantitativ:
  $p^A\ [p(X \to Y) = 4/4] = |4/4 - 0/4| = 4/4 = 1$ positive Abhängigkeit
  $p^A\ [p(X \to Y) = 2/4] = |2/4 - 2/4| = 0/4 = 0$
  $p^A\ [p(X \to Y) = 0/4] = |0/4 - 4/4| = 4/4 = 1$ negative Abhängigkeit

2) IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

A) qualitativ:	$X \rightarrow Y$	$X *\!\rightarrow Y$
1. theoret. Wahrsch.	$p^T = 3/4$	$p^T = 1/2$
2. Tautologie-Grad	$p^T = 3/4$	$p^T = 1/2$
3. Informationsgehalt	$p^I = 1/4$	$p^I = 1/2$
4. Bestimmtheit	$p^B = 1/3$	$p^B = 1/1 = 1$
5. Abhängigkeit	$p^A = 1/1 = 1$	$p^A = 1/1 = 1$

B) quantitativ: z. B.	$p(X \rightarrow Y) = 4/4$	$p(X *\!\rightarrow Y) = 4/4$
1. theoret. Wahrsch.	$p^T = 81/256 = 0{,}32$	$p^T = 1/16 = 0{,}06$
2. Tautologie-Grad	$p^T = 81/256 = 0{,}32$	$p^T = 1/16 = 0{,}06$
3. Informationsgehalt	$p^I = 175/256 = 0{,}68$	$p^I = 15/16 = 0{,}94$
4. Bestimmtheit	$p^B = 1/81 = 0{,}01$	$p^B = 1/1 = 1$
5. Abhängigkeit	$p^A = 4/4 = 1$	$p^A = 4/4 = 1$

5-3-4 Quantitative Aussagen-Logik

5-3-4-1 p^T BEI DETERMINISTISCHEN RELATIONEN ($p = 1$)

Nummer	Name	Wahrheits-verteilung	Relator $p = 1$	p^T	p^T dez.
1)	Disjunktion	+ + + −	$p(X \vee Y) = 1$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
2)	Replikation	+ + − +	$p(X \leftarrow Y) = 1$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
3)	Präpension	+ + − −	$p(X \rfloor Y) = 1$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
4)	Implikation	+ − + +	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
5)	Postpension	+ − + −	$p(X \lfloor Y) = 1$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
6)	Äquivalenz	+ − − +	$p(X \leftrightarrow Y) = 1$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
7)	Konjunktion	+ − − −	$p(X \wedge Y) = 1$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
8)	Exklusion	− + + +	$p(X \mid Y) = 1$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
9)	Kontravalenz	− + + −	$p(X >< Y) = 1$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
10)	Postnonpension	− + − +	$p(X \rceil Y) = 1$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
11)	Postsektion	− + − −	$p(X >- Y) = 1$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
12)	Pränonpension	− − + +	$p(X \rceil Y) = 1$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
13)	Präsektion	− − + −	$p(X -< Y) = 1$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
14)	Rejektion	− − − +	$p(X \nabla Y) = 1$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$

5-3-4-2 p^T BEI NULLISTISCHEN RELATIONEN ($p = 0$)

Nummer	Name	Wahrheits-verteilung	Relator $p = 0$	p^T	p^T dez.
1)	Disjunktion	+ + + −	$p(X \vee Y) = 0$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
2)	Replikation	+ + − +	$p(X \leftarrow Y) = 0$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
3)	Präpension	+ + − −	$p(X \rfloor Y) = 0$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
4)	Implikation	+ − + +	$p(X \rightarrow Y) = 0$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
5)	Postpension	+ − + −	$p(X \lfloor Y) = 0$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
6)	Äquivalenz	+ − − +	$p(X \leftrightarrow Y) = 0$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
7)	Konjunktion	+ − − −	$p(X \wedge Y) = 0$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
8)	Exklusion	− + + +	$p(X \mid Y) = 0$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
9)	Kontravalenz	− + + −	$p(X >< Y) = 0$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
10)	Postnonpension	− + − +	$p(X \rceil Y) = 0$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
11)	Postsektion	− + − −	$p(X >- Y) = 0$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
12)	Pränonpension	− − + +	$p(X \rceil Y) = 0$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
13)	Präsektion	− − + −	$p(X -< Y) = 0$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
14)	Rejektion	− − − +	$p(X \nabla Y) = 0$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$

5-3-4-3 FORMELN ZUR BERECHNUNG VON p^T (bei p = 1 oder p = 0)

Hier geht es um *quantitative* Relationen der Form $p(\Phi \text{ R } \Psi) = 1$ oder $p(\Phi \text{ R } \Psi) = 0$

- *semi-tautologische* Relationen: p^T(Struktur) > 0,5 z. B. $p(X \rightarrow Y) = r/n$
- *semi-kontradiktorische* Relationen p^T(Struktur) < 0,5 z. B. $p(X \wedge Y) = r/n$
- *neutrale* Relationen: p^T(Struktur) = 0,5 z. B. $p(X \leftrightarrow Y) = r/n$

Dabei kommen 3 Formeln zum Einsatz:

1) *semi-tautologische Relationen*: $p^T = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$

$p^T[p = 1, r = n] = (3/4)^r$ oder $(3/4)^n$

$p^T[p = 0, r = 0] = (1/4)^n$

Für folgende Relatoren bzw. Relationen, jeweils in quantitativer Form, z. B. $p(X \rightarrow Y) = r/n$

- $X \rightarrow Y$
- $X \leftarrow Y$
- $X \vee Y$
- $X \mid Y$

2) *semi-kontradiktorische Relationen*: $p^T = \binom{n}{r}(1/4)^r(3/4)^{n-r}$

$p^T[p = 1, r = n] = (1/4)^r$ oder $(1/4)^n$

$p^T[p = 0, r = 0] = (3/4)^n$

- $X \wedge Y$
- $X >\!- Y$
- $X -\!< Y$
- $X \nabla Y$

3) *neutrale Relationen*: $p^T = \binom{n}{r}(1/2)^r(1/2)^{n-r}$

$p^T[p = 1, r = n] = (1/2)^r$ oder $(1/2)^n$

$p^T[p = 0, r = 0] = (1/2)^n$

(analog zu den anderen Formeln könnte man für 1/2 natürlich auch 2/4 einsetzen)

- $X \leftrightarrow Y$ • $X >\!< Y$
- $X \rfloor Y$ • $X \lfloor Y$
- $X \rceil Y$ • $X \lceil Y$

5-3-5 Quantitative Quantoren-Logik

5-3-5-1 MODELLE FÜR QUANTITATIVE ALL- UND PARTIKULÄR-RELATIONEN

alle: n/n	alle nicht: 0/n	einige: > 0/n	einige nicht: < n/n
$p = 1$: $p = n/n$	$p = 0$: $p = 0/n$	$p > 0$: $p > 0/n$	$p < 1$: $p < n/n$

		$\mathbf{p^T}$
MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION		
1. alle F sind G	$p(Fx \to Gx) = 1$	$3^n/4^n$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \to Gx) = 0$	$1/4^n$
3. einige F sind G	$p(Fx \to Gx) > 0$	$(4^n - 1)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \to Gx) < 1$	$(4^n - 3^n)/4^n$
MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION		
1. alle F sind G	$p(Fx \to Gx) = 1$	$3^n/4^n$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \to \neg Gx) = 1$	$3^n/4^n$
3. einige F sind G	$p(Fx \to Gx) > 0$	$(4^n - 1)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \to \neg Gx) > 0$	$(4^n - 1)/4^n$
MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION		
1. alle F sind G	$p(Fx \wedge Gx) = 1$	$1/4^n$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) = 1$	$1/4^n$
3. einige F sind G	$p(Fx \wedge Gx) > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION		
1. alle F sind G	$p(Fx \to Gx) = 1$	$3^n/4^n$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \to \neg Gx) = 1$	$3^n/4^n$
3. einige F sind G	$p(Fx \wedge Gx) > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
MODELL 5: (NEGATIVE) POSITIV-IMPLIKATION		
1. alle F sind G	$p(Fx *\!\to Gx) = 1$	$1/2^n$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx *\!\to Gx) = 0$	$1/2^n$
3. einige F sind G	$p(Fx *\!\to Gx) > 0$	$(2^n - 1)/2^n$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx *\!\to Gx) < 1$	$(2^n - 1)/2^n$

5-3-5-2 INKLUSIVE UND EXKLUSIVE FORMALISIERUNGEN

Inklusiv: mindestens einige (mindestens einer)
Exklusiv: genau einige

Dabei bieten sich, wie mehrfach beschrieben, verschiedene Formalisierungen für eine Relation der Form „einige F sind G" an: mit $\rightarrow$, $\wedge$, $*\rightarrow$.

1. *inklusives „einige"*

• (mindestens) einige F sind G p^T

$Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$p(Fx \rightarrow Gx) > 0$	$(4^n - 1)/4^n$
$Vx(Fx \wedge Gx)$	$p(Fx \wedge Gx) > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
$Vx(Fx *\rightarrow Gx)$	$p(Fx *\rightarrow Gx) > 0$	$(2^n - 1)/2^n$

• (mindestens) einige F sind nicht G p^T

mit $V\neg$ formalisiert

$Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$	$p(Fx \rightarrow Gx) < 1$	$(4^n - 3^n)/4^n$
$Vx\neg(Fx \wedge Gx)$	$p(Fx \wedge Gx) < 1$	$(4^n - 1)/4^n$
$Vx\neg(Fx *\rightarrow Gx)$	$p(Fx *\rightarrow Gx) < 1$	$(2^n - 1)/2^n$

mit V formalisiert

$Vx(Fx \rightarrow \neg Gx)$	$p(Fx \rightarrow \neg Gx) > 0$	$(4^n - 1)/4^n$
$Vx(Fx \wedge \neg Gx)$	$p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
$Vx(Fx *\rightarrow \neg Gx)$	$p(Fx *\rightarrow \neg Gx) > 0$	$(2^n - 1)/2^n$

2. *Exklusives „einige"*

genau einige F sind G p^T

$\exists x(Fx \rightarrow G)$	$0 < p(Fx \rightarrow G) < 1$	$(4^n - 3^n - 1)/4^n$
$\exists x(Fx \wedge G)$	$0 < p(Fx \wedge G) < 1$	$(4^n - 3^n - 1)/4^n$
$\exists x(Fx *\rightarrow G)$	$0 < p(Fx *\rightarrow G) < 1$	$(2^n - 2)/2^n$

5 – 4 META-LOGIK ANALYTISCHER RELATIONEN

5-4-1 Aussagen-Logik

Ich bringe jeweils Beispiele, keine (auch gar nicht mögliche) vollständige Darstellung

5-4-1-1 p^T BEI SCHLÜSSEN

- $p^T = 4/4 = 1{,}00$

  $X \wedge Y \Rightarrow Y$

  $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$

- $p^T = 3/4 = 0{,}75$

  $X \vee Y \longrightarrow Y$

  $X \longrightarrow X \wedge Y$

- $p^T = 2/4 = 0{,}50$

  $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$

  $X \vee Y \longrightarrow \neg X$

- $p^T = 1/4 = 0{,}25$

  $X \vee Y \longrightarrow X \nabla Y$

  $X \mid Y \longrightarrow X \wedge Y$

- $p^T = 0/4 = 0{,}00$

  $X \vee \neg X \nRightarrow Y \wedge \neg Y$

  $(X \wedge Y \Rightarrow Y) \nRightarrow Y \wedge \neg Y$

5-4-1-2 p^T BEI ANDEREN ANALYTISCHEN RELATIONEN

- $p^T = 4/4 = 1{,}00$

  $X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$

- $p^T = 3/4 = 0{,}75$

  $(X \vee Y) \;{}^{+}\!\vee^{-}\; (X \wedge Y)$

- $p^T = 2/4 = 0{,}50$

  $(X \leftrightarrow Y) \;{}^{+}\!\vee^{-}\; (X \wedge Y)$

- $p^T = 1/4 = 0{,}25$

  $(X \vee Y) \;{}^{+}\!\wedge^{-}\; (X \wedge Y)$

- $p^T = 0/4 = 0{,}00$

  $X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$

5-4-1-3 p^T BEI POSITIV-SCHLÜSSEN

Hier ergeben sich *mehr* unterschiedliche Werte als bei normalen Schlüssen.
Für $p^T = 1$ findet man verschiedene Möglichkeiten, z. B. 4/4, 3/3, 2/2, 1/1, ebenso bei $p^T = 0$.
Der Nenner berechnet sich jeweils nach der Anzahl der + der Prämisse.

- $p^T = 4/4 = 1{,}00$ $\quad X \vee \neg X \ {*}{\Rightarrow} \neg(X \wedge \neg X)$ $\quad + + + +$
- $p^T = 3/4 = 0{,}75$ $\quad X \vee \neg X \ {*}{\longrightarrow}\ X \vee Y$ $\quad + + + -$
- $p^T = 2/3 = 0{,}66$ $\quad X \vee Y \ {*}{\longrightarrow}\ Y$ $\quad + - +$ □
- $p^T = 1/2 = 0{,}50$ $\quad X\ {*}{\longrightarrow}\ X \wedge Y$ $\quad + -$ □ □
- $p^T = 1/3 = 0{,}33$ $\quad X \vee Y\ {*}{\longrightarrow} X \wedge Y$ $\quad + - -$ □
- $p^T = 1/4 = 0{,}25$ $\quad X \vee \neg X \ {*}{\longrightarrow} X \wedge Y$ $\quad + - - -$
- $p^T = 0/1 = 0{,}00$ $\quad X \wedge Y\ {*}{\nRightarrow}\ \neg(X \wedge Y)$ $\quad -$ □ □ □

5-4-1-4 p^T BEI SCHLÜSSEN MIT MEHR ALS ZWEI VARIABLEN

- 3 Variablen

$p^T[(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \ \Rightarrow\ (X \to Z)] = 8/8 = 1$

$p^T[(X \wedge Y \wedge Z) \ \Rightarrow\ (X \vee Y \vee Z)] = 8/8 = 1$

$p^T[(X \vee Y \vee Z) \ \longrightarrow\ (X \wedge Y \wedge Z)] = 2/8 = 0{,}25$

- 4 Variablen

$p^T[(X \to Y) \wedge (V \to W) \ \Rightarrow\ (X \to Y) \vee (V \to W)] = 16/16 = 1$

$p^T[(X \to Y) \wedge (V \to W) \ \longleftrightarrow\ (X \wedge Y) \to (V \wedge W)] = 12/16 = 3/4 = 0{,}75$

$p^T[(X \to Y) \wedge (V \to W) \ \longrightarrow\ (X \leftarrow Y) \vee (V \leftarrow W)] = 15/16 = 0{,}94$

Im Folgenden wird *dieselbe* Verbindung mit immer *anderen* Zentral-Relatoren dargestellt:
$p^T[(X \to Y) \wedge (V \to W) \ \longrightarrow\ (X \wedge Y) \vee (V \wedge W)] = 12/16 = 0{,}75$

$p^T[(X \to Y) \wedge (V \to W) \ \longleftarrow\ (X \wedge Y) \vee (V \wedge W)] = 14/16 = 0{,}88$

$p^T[(X \to Y) \wedge (V \to W) \ {}^{+}\vee^{-}\ (X \wedge Y) \vee (V \wedge W)] = 11/16 = 0{,}69$

$p^T[(X \to Y) \wedge (V \to W) \ {}^{+}|^{-}\ (X \wedge Y) \vee (V \wedge W)] = 14/16 = 0{,}88$

5-4-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

5-4-2-1 WAHRHEITSTABELLEN FÜR $V(X \to Y) \longrightarrow \Lambda(X \to Y)$

$p^T[Vx(Fx \to Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)]$ bzw. $p^T[V(X \to Y) \longrightarrow \Lambda(X \to Y)]$ Bei n = 3

	X_1	$\to$	Y_1	$\vee$	X_2	$\to$	Y_2	$\vee$	X_3	$\to$	Y_3	$\vee$	$\longrightarrow$	$\wedge$	X_1	$\to$	Y_1	$\wedge$	X_2	$\to$	Y_2	$\wedge$	X_3	$\to$	Y_3
1	+	+	+		+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+		+	+	+
2	+	+	+		+	+	+		+	–	–	+	–	–	+	+	+		+	+	+		+	–	–
3	+	+	+		+	+	+		–	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+		–	+	+
4	+	+	+		+	+	+		–	+	–	+	+	+	+	+	+		+	+	+		–	+	–
5	+	+	+		+	–	–		+	+	+	+	–	–	+	+	+		+	–	–		+	+	+
6	+	+	+		+	–	–		+	–	–	+	–	–	+	+	+		+	–	–		+	–	–
7	+	+	+		+	–	–		–	+	+	+	–	–	+	+	+		+	–	–		–	+	+
8	+	+	+		+	–	–		–	+	–	+	–	–	+	+	+		+	–	–		–	+	–
9	+	+	+		–	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+		–	+	+		+	+	+
10	+	+	+		–	+	+		+	–	–	+	–	–	+	+	+		–	+	+		+	–	–
11	+	+	+		–	+	+		–	+	+	+	+	+	+	+	+		–	+	+		–	+	+
12	+	+	+		–	+	+		–	+	–	+	+	+	+	+	+		–	+	+		–	+	–
13	+	+	+		–	+	–		+	+	+	+	+	+	+	+	+		–	+	–		+	+	+
14	+	+	+		–	+	–		+	–	–	+	–	–	+	+	+		–	+	–		+	–	–
15	+	+	+		–	+	–		–	+	+	+	+	+	+	+	+		–	+	–		–	+	+
16	+	+	+		–	+	–		–	+	–	+	+	+	+	+	+		–	+	–		–	+	–
17	+	–	–		+	+	+		+	+	+	+	–	–	+	–	–		+	+	+		+	+	+
18	+	–	–		+	+	+		+	–	–	+	–	–	+	–	–		+	+	+		+	–	–
19	+	–	–		+	+	+		–	+	+	+	–	–	+	–	–		+	+	+		–	+	+
20	+	–	–		+	+	+		–	+	–	+	–	–	+	–	–		+	+	+		–	+	–
21	+	–	–		+	–	–		+	+	+	+	–	–	+	–	–		+	–	–		+	+	+
22	+	–	–		+	–	–		+	–	–	–	+	–	+	–	–		+	–	–		+	–	–
23	+	–	–		+	–	–		–	+	+	+	–	–	+	–	–		+	–	–		–	+	+
24	+	–	–		+	–	–		–	+	–	+	–	–	+	–	–		+	–	–		–	+	–
25	+	–	–		–	+	+		+	+	+	+	–	–	+	–	–		–	+	+		+	+	+
26	+	–	–		–	+	+		+	–	–	+	–	–	+	–	–		–	+	+		+	–	–
27	+	–	–		–	+	+		–	+	+	+	–	–	+	–	–		–	+	+		–	+	+
28	+	–	–		–	+	+		–	+	–	+	–	–	+	–	–		–	+	+		–	+	–
29	+	–	–		–	+	–		+	+	+	+	–	–	+	–	–		–	+	–		+	+	+
30	+	–	–		–	+	–		+	–	–	+	–	–	+	–	–		–	+	–		+	–	–
31	+	–	–		–	+	–		–	+	+	+	–	–	+	–	–		–	+	–		–	+	+
32	+	–	–		–	+	–		–	+	–	+	–	–	+	–	–		–	+	–		–	+	–
33	–	+	+		+	+	+		+	+	+	+	+	+	–	+	+		+	+	+		+	+	+
34	–	+	+		+	+	+		+	–	–	+	–	–	–	+	+		+	+	+		+	–	–
35	–	+	+		+	+	+		–	+	+	+	+	+	–	+	+		+	+	+		–	+	+
36	–	+	+		+	+	+		–	+	–	+	+	+	–	+	+		+	+	+		–	+	–
37	–	+	+		+	–	–		+	+	+	+	–	–	–	+	+		+	–	–		+	+	+
38	–	+	+		+	–	–		+	–	–	+	–	–	–	+	+		+	–	–		+	–	–
39	–	+	+		+	–	–		–	+	+	+	–	–	–	+	+		+	–	–		–	+	+
40	–	+	+		+	–	–		–	+	–	+	–	–	–	+	+		+	–	–		–	+	–
41	–	+	+		–	+	+		+	+	+	+	+	+	–	+	+		–	+	+		+	+	+
42	–	+	+		–	+	+		+	–	–	+	–	–	–	+	+		–	+	+		+	–	–
43	–	+	+		–	+	+		–	+	+	+	+	+	–	+	+		–	+	+		–	+	+

Vx(Fx → Gx) ⟶ Λx(Fx → Gx) bzw. V(X → Y) ⟶ Λ(X → Y) 2. Seite

	X_1	→	Y_1	∨	X_2	→	Y_2	∨	X_3	→	Y_3	∨	⟶	∧	X_1	→	Y_1	∧	X_2	→	Y_2	∧	X_3	→	Y_3
44	–	+	+		–	+	+		–	+	–	+	+	+	–	+	+		–	+	+		–	+	–
45	–	+	+		–	+	–		+	+	+	+	+	+	–	+	+		–	+	–		+	+	+
46	–	+	+		–	+	–		+	–	–	+	–	–	–	+	+		–	+	–		+	–	–
47	–	+	+		–	+	–		–	+	+	+	+	+	–	+	+		–	+	–		–	+	+
48	–	+	+		–	+	–		–	+	–	+	+	+	–	+	+		–	+	–		–	+	–
49	–	+	–		+	+	+		+	+	+	+	+	+	–	+	–		+	+	+		+	+	+
50	–	+	–		+	+	+		+	–	–	+	–	–	–	+	–		+	+	+		+	–	–
51	–	+	–		+	+	+		–	+	+	+	+	+	–	+	–		+	+	+		–	+	+
52	–	+	–		+	+	+		–	+	–	+	+	+	–	+	–		+	+	+		–	+	–
53	–	+	–		+	–	–		+	+	+	+	–	–	–	+	–		+	–	–		+	+	+
54	–	+	–		+	–	–		+	–	–	+	–	–	–	+	–		+	–	–		+	–	–
55	–	+	–		+	–	–		–	+	+	+	–	–	–	+	–		+	–	–		–	+	+
56	–	+	–		+	–	–		–	+	–	+	–	–	–	+	–		+	–	–		–	+	–
57	–	+	–		–	+	+		+	+	+	+	+	+	–	+	–		–	+	+		+	+	+
58	–	+	–		–	+	+		+	–	–	+	–	–	–	+	–		–	+	+		+	–	–
59	–	+	–		–	+	+		–	+	+	+	+	+	–	+	–		–	+	+		–	+	+
60	–	+	–		–	+	+		–	+	–	+	+	+	–	+	–		–	+	+		–	+	–
61	–	+	–		–	+	–		+	+	+	+	+	+	–	+	–		–	+	–		+	+	+
62	–	+	–		–	+	–		+	–	–	+	–	–	–	+	–		–	+	–		+	–	–
63	–	+	–		–	+	–		–	+	+	+	+	+	–	+	–		–	+	–		–	+	+
64	–	+	–		–	+	–		–	+	–	+	+	+	–	+	–		–	+	–		–	+	–
													28+												

63+ 27+

Die Wahrheitstafel wurde zur Übersichtlichkeit modifiziert, die *zentralen* Relatoren stehen mittig. Für die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T (hier a Beispiel n = 3) ergibt sich:

• Synthetisch:

p^T[Vx(Fx → Gx)] $= (4^n - 1)/4^n$ $= (4^3 - 1)/4^3$ = 63/64 = 0,98

p^T[Λx(Fx → Gx)] $= (3/4)^n$ $= (3/4)^3$ = 27/64 = 0,42

• Analytisch:

p^T[Vx(Fx → Gx) ⟶ Λx(Fx → Gx)] $= (3^n + 1)/ 4^n$ $= (3^3 + 1)/ 4^3$ = 28/64 = 0,44

Erläuterung zur *Implikation* →:

Nenner: die Implikation ist für *alle* möglichen Welten definiert, der Nenner bei n = 3 ist daher: $4^3 = 64$

Zähler: den Zähler kann man unter dem Zentral-Relator ⟶ ablesen. Die Implikation ist nur falsch, wenn die Prämisse wahr und die Konklusion falsch ist. Das ist in 36 Welten gegeben. Daher ergibt sich für den Zähler: 64 – 36 = 28. Also: p^T = 28/64.

p^T[Vx(Fx → Gx) *⟶ Λx(Fx → Gx)] $= (3^n)/4^n - 1$ $= (3^3)/4^3 - 1$ = 27/63 = 0,43

Bei der *Positiv-Implikation* *→ ergäben sich abweichende Werte:

Nenner: die Positiv-Implikation wird *nur* für die Welten definiert, in denen die Prämisse wahr (+) ist. In *einer* Welt (Zeile 22) ist die Prämisse falsch. Der Nenner ist also: 64 –1 = 63.

Zähler: auch für den Zähler ergibt sich *ein* + weniger, der Zähler beträgt somit 28 – 1 = 27. Also: p^T = 27/63.

5-4-2-2 WAHRHEITSTABELLE FÜR $\Lambda(X \rightarrow Y) \longrightarrow V(X \wedge Y)$

p^T von $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ bzw. $\Lambda(X \rightarrow Y) \longrightarrow V(X \wedge Y)$ Bei n = 3

	X_1	$\rightarrow$	Y_1	,	X_2	$\rightarrow$	Y_2	,	X_3	$\rightarrow$	Y_3	$\wedge$	$\longrightarrow$	$\vee$	X_1	$\wedge$	Y_1	,	X_2	$\wedge$	Y_2	,	X_3	$\wedge$	Y_3
1	+	+	+		+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+		+		+		+		+
2	+	+	+		+	+	+		+	–	–	–	+	+	+	+	+		+		+		+		–
3	+	+	+		+	+	+		–	+	+	+	+	+	+	+	+		+		+		–		+
4	+	+	+		+	+	+		–	+	–	+	+	+	+	+	+		+		+		–		–
5	+	+	+		+	–	–		+	+	+	–	+	+	+	+	+		+		–		+		+
6	+	+	+		+	–	–		+	–	–	–	+	+	+	+	+		+		–		+		–
7	+	+	+		+	–	–		–	+	+	–	+	+	+	+	+		+		–		–		+
8	+	+	+		+	–	–		–	+	–	–	+	+	+	+	+		+		–		–		–
9	+	+	+		–	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+		–		+		+		+
10	+	+	+		–	+	+		+	–	–	–	+	+	+	+	+		–		+		+		–
11	+	+	+		–	+	+		–	+	+	+	+	+	+	+	+		–		+		–		+
12	+	+	+		–	+	+		–	+	–	+	+	+	+	+	+		–		+		–		–
13	+	+	+		–	+	–		+	+	+	+	+	+	+	+	+		–		–		+		+
14	+	+	+		–	+	–		+	–	–	–	+	+	+	+	+		–		–		+		–
15	+	+	+		–	+	–		–	+	+	+	+	+	+	+	+		–		–		–		+
16	+	+	+		–	+	–		–	+	–	+	+	+	+	+	+		–		–		–		–
17	+	–	–		+	+	+		+	+	+	–	+	+	+	–	–		+		+		+		+
18	+	–	–		+	+	+		+	–	–	–	+	+	+	–	–		+		+		+		–
19	+	–	–		+	+	+		–	+	+	–	+	+	+	–	–		+		+		–		+
20	+	–	–		+	+	+		–	+	–	–	+	+	+	–	–		+		+		–		–
21	+	–	–		+	–	–		+	+	+	–	+	+	+	–	–		+		–		+		+
22	+	–	–		+	–	–		+	–	–	–	+	–	+	–	–		+		–		+		–
23	+	–	–		+	–	–		–	+	+	–	+	–	+	–	–		+		–		–		+
24	+	–	–		+	–	–		–	+	–	–	+	–	+	–	–		+		–		–		–
25	+	–	–		–	+	+		+	+	+	–	+	+	+	–	–		–		+		+		+
26	+	–	–		–	+	+		+	–	–	–	+	–	+	–	–		–		+		+		–
27	+	–	–		–	+	+		–	+	+	–	+	–	+	–	–		–		+		–		+
28	+	–	–		–	+	+		–	+	–	–	+	–	+	–	–		–		+		–		–
29	+	–	–		–	+	–		+	+	+	–	+	+	+	–	–		–		–		+		+
30	+	–	–		–	+	–		+	–	–	–	+	–	+	–	–		–		–		+		–
31	+	–	–		–	+	–		–	+	+	–	+	–	+	–	–		–		–		–		+
32	+	–	–		–	+	–		–	+	–	–	+	–	+	–	–		–		–		–		–
33	–	+	+		+	+	+		+	+	+	+	+	+	–	–	+		+		+		+		+
34	–	+	+		+	+	+		+	–	–	–	+	+	–	–	+		+		+		+		–
35	–	+	+		+	+	+		–	+	+	+	+	+	–	–	+		+		+		–		+
36	–	+	+		+	+	+		–	+	–	+	+	+	–	–	+		+		+		–		–
37	–	+	+		+	–	–		+	+	+	–	+	+	–	–	+		+		–		+		+
38	–	+	+		+	–	–		+	–	–	–	+	–	–	–	+		+		–		+		–
39	–	+	+		+	–	–		–	+	+	–	+	–	–	–	+		+		–		–		+
40	–	+	+		+	–	–		–	+	–	–	+	–	–	–	+		+		–		–		–
41	–	+	+		–	+	+		+	+	+	+	+	+	–	–	+		–		+		+		+
42	–	+	+		–	+	+		+	–	–	–	+	–	–	–	+		–		+		+		–
43	–	+	+		–	+	+		–	+	+	+	–	–	–	–	+		–		+		–		+

p^T von $\Lambda x(Fx \to Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ bzw. $\Lambda(X \to Y) \longrightarrow V(X \wedge Y)$ 2. Seite

	X_1	$\to$	Y_1	,	X_2	$\to$	Y_2	,	X_3	$\to$	Y_3	$\wedge$	$\longrightarrow$	$\vee$	X_1	$\wedge$	Y_1	,	X_2	$\wedge$	Y_2	,	X_3	$\wedge$	Y_3
44	–	+	+		–	+	+		–	+	–	+	–	–	–	–	+		–		+		–		–
45	–	+	+		–	+	–		+	+	+	+	+	+	–	–	+		–		–		+		+
46	–	+	+		–	+	–		+	–	–	–	+	–	–	–	+		–		–		+		–
47	–	+	+		–	+	–		–	+	+	+	–	–	–	–	+		–		–		–		+
48	–	+	+		–	+	–		–	+	–	+	–	–	–	–	+		–		–		–		–
49	–	+	–		+	+	+		+	+	+	+	+	+	–	–	–		+		+		+		+
50	–	+	–		+	+	+		+	–	–	–	+	+	–	–	–		+		+		+		–
51	–	+	–		+	+	+		–	+	+	+	+	+	–	–	–		+		+		–		+
52	–	+	–		+	+	+		–	+	–	+	+	+	–	–	–		+		+		–		–
53	–	+	–		+	–	–		+	+	+	–	+	+	–	–	–		+		–		+		+
54	–	+	–		+	–	–		+	–	–	–	+	–	–	–	–		+		–		+		–
55	–	+	–		+	–	–		–	+	+	–	+	–	–	–	–		+		–		–		+
56	–	+	–		+	–	–		–	+	–	–	+	–	–	–	–		+		–		–		–
57	–	+	–		–	+	+		+	+	+	+	+	+	–	–	–		–		+		+		+
58	–	+	–		–	+	+		+	–	–	–	+	–	–	–	–		–		+		+		–
59	–	+	–		–	+	+		–	+	+	+	–	–	–	–	–		–		+		–		+
60	–	+	–		–	+	+		–	+	–	+	–	–	–	–	–		–		+		–		–
61	–	+	–		–	+	–		+	+	+	+	+	+	–	–	–		–		–		+		+
62	–	+	–		–	+	–		+	–	–	–	+	–	–	–	–		–		–		+		–
63	–	+	–		–	+	–		–	+	+	+	–	–	–	–	–		–		–		–		+
64	–	+	–		–	+	–		–	+	–	+	–	–	–	–	–		–		–		–		–
												27+	56+	37+											

Theoretische Wahrscheinlichkeiten (hier am Beispiel n = 3):

- *Quantoren-logisch*
  - Synthetisch
    - $p^T[\Lambda x(Fx \to Gx)] = (3/4)^n = (3/4)^3 = 27/64 = 0{,}42$
    - $p^T[Vx(Fx \wedge Gx)] = (4^n - 3^n)/4^n = (4^3 - 3^3)/4^3 = 37/64 = 0{,}58$
  - Analytisch
    - $p^T[\Lambda x(Fx \to Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)] = (4^n - 2^n)/4^n = (4^3 - 2^3)/4^3 = 56/64 = 0{,}88$
    - $p^T[\Lambda x(Fx \to Gx) *\!\!\longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)] = (3^n - 2^n)/3^n = (3^3 - 2^3)/3^3 = 19/27 = 0{,}70$

- *Quantitativ* (dies ist ein Vorgriff auf die *quantitative* Quantoren-Logik, vgl. 5-4-5)
  - Synthetisch
    - $p^T[p(Fx \to Gx) = 1] = (3/4)^n$
    - $p^T[p(Fx \wedge Gx) > 0] = (4^n - 3^n)/4^n$
  - Analytisch
    - $p^T[p(Fx \to Gx) = 1 \longrightarrow p(Fx \wedge Gx) > 0] = (4^n - 2^n)/4^n$
    - $p^T[p(Fx \to Gx) = 1 *\!\!\longrightarrow p(Fx \wedge Gx) > 0] = (3^n - 2^n)/3^n$

5-4-2-3 p^T BZW. FOLGE-GRAD BEI QUANTOREN-LOGISCHEN SCHLÜSSEN

1. EINFACHE TAUTOLOGIE

$p^T = (2/2)^n = 1$

- $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$
- $\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow Vx\neg(Fx)$

- $\neg Vx\neg(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda\neg(Fx)$
- $\neg Vx(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda(Fx)$

2. KOMPLEXE TAUTOLOGIE

$p^T = (4/4)^n = 1$

- $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$
- $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow \neg Gx)$

- $\neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$
- $\neg Vx\neg(Fx \rightarrow \neg Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow \neg Gx)$

- $\neg Vx(Fx \wedge \neg Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx)$
- $\neg Vx(Fx \wedge Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \wedge Gx)$

3. EINFACH SEMI-ANALYTISCH

$p^T = 1/2^{n-1}$

- $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$
- $Vx\neg(Fx) \longrightarrow \Lambda x\neg(Fx)$

- $\neg\Lambda x\neg(Fx) \longrightarrow \neg Vx\neg(Fx)$
- $\neg\Lambda(Fx) \longrightarrow \neg Vx(Fx)$

4. KOMPLEX SEMI-ANALYTISCH

$p^T = (3^n + 1)/4^n$

- $Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
- $Vx(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$

- $\neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$
- $\neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow \neg Vx\neg(Fx \rightarrow \neg Gx)$

- $\neg\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx) \longrightarrow \neg Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
- $\neg\Lambda x(Fx \wedge Gx) \longrightarrow \neg Vx(Fx \wedge Gx)$

$p^T = (4^n - 2^n)/4^n$

- $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$
- $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge \neg Gx)$

- $\neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge Gx)$
- $\neg Vx\neg(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge \neg Gx)$

- $\neg Vx(Fx \wedge \neg Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge Gx)$
- $\neg Vx(Fx \wedge Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge \neg Gx)$

VERGLEICH
Ich bringe hier einen Vergleich von *Implikation* und *Positiv-Implikation*:

- einfach

Implikation	Positiv-Implikation
$\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ $p^T = (2/2)^n = 1$	$\Lambda x(Fx) *\!\Rightarrow Vx(Fx)$ $p^T = (1/1)^n = 1$
$Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$ $p^T = 1/2^{n-1}$	$Vx(Fx) *\!\longrightarrow \Lambda x(Fx)$ $p^T = 1/(2^n - 1)$

- komplex

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$ $p^T = (4/4)^n = 1$	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\!\Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$ $p^T = (3/3)^n = 1$
$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ $p^T = (4^n - 2^n)/4^n$	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\!\longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ $p^T = (3^n - 2^n)/3^n$
$Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ $p^T = (3^n + 1)/4^n$	$Vx(Fx \rightarrow Gx) *\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ $p^T = 3^n/(4^n - 1)$

5-4-3 Quantitative Logik

5-4-3-1 FORMELN ZUR BERECHNUNG VON p^T BEI POSITIV-SCHLÜSSEN

Die Formeln sind jeweils auf *quantitative* Schlüsse mit der *Positiv-Implikation* anzuwenden, z. B. der Form $p(X \rightarrow Y) = r/n$ $* \longrightarrow$ $p(X \wedge Y) = s/n$ (genauer vgl. 4-3-3-1 bis 4-3-3-3)

1. Schluss von einer Relation mit strukturell $p^T = 3/4$ (z. B. $X \rightarrow Y$)

- auf eine Relation mit $p^T = 2/4$

$$\binom{r}{r-s}(2/3)^s(1/3)^{r-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden (jeweils in quantitativer Form):

$(X \rightarrow Y) *\longrightarrow (X \leftrightarrow Y)$
$(X \vee Y) *\longrightarrow (Y)$

- auf eine Relation mit $p^T = 1/4$

$$\binom{r}{r-s}(1/3)^s(2/3)^{r-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \rightarrow Y) *\longrightarrow (X \wedge Y)$
$(X \vee Y) *\longrightarrow (X \wedge Y)$

2. Schluss von einer Relation mit strukturell $p^T = 2/4$ (z. B. $X \leftrightarrow Y$)

- auf eine Relation mit $p^T = 3/4$

$$\binom{n-r}{n-s}(1/2)^{n-s}(1/2)^{s-r}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (analytische) Schlüsse anzuwenden

$(X \leftrightarrow Y) *\Rightarrow (X \rightarrow Y)$
$(X *\Rightarrow (X \vee Y)$

- auf eine Relation mit $p^T = 1/4$

$$\binom{r}{r-s}(1/2)^s(1/2)^{r-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \leftrightarrow Y) *\longrightarrow (X \wedge Y)$
$X *\longrightarrow (X \wedge Y)$

2. Schluss von einer Relation mit strukturell $p^T = 1/4$ (z. B. $X \wedge Y$)

- auf eine Relation mit $p^T = 3/4$

$$\binom{n-r}{n-s}(2/3)^{s-r}(1/3)^{n-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \wedge Y) *\Rightarrow (X \rightarrow Y)$
$(X \wedge Y) *\Rightarrow (X \vee Y)$

- auf eine Relation mit $p^T = 2/4$

$$\binom{n-r}{n-s}(1/3)^{s-r}(2/3)^{n-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \wedge Y) *\Rightarrow X$
$(X \wedge Y) *\Rightarrow Y$

5-4-3-2 TABELLE: POSITIV-SCHLUSS $p(X \rightarrow Y) = r/n$ *⟶ $p(X \wedge Y) = s/n$ für n = 1 bis n = 4 (Seite 1)

n	$p(X \rightarrow Y)$			*⟶			$p(X \wedge Y)$	p^T ungek.	p^T gekürzt	p^T dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	a+c+d	b		a	c + d	$\frac{a}{a+b+c+d}$			
1	1/1	1	0		1	0	1/1	1/3	1/3	0,33
					0	1	0/1	2/3	2/3	0,67
	0/1	0	1		0	0	0/1	1/1	1/1	1,00
2	2/2	2	0		2	0	2/2	1/9	1/9	0,11
					1	1	1/2	4/9	4/9	0,44
					0	2	0/2	4/9	4/9	0,44
	1/2	1	1		1	0	1/2	2/6	1/3	0,33
					0	1	0/2	4/6	2/3	0,67
	0/2	0	2		0	0	0/2	1/1	1/1	1,00
3	3/3	3	0		3	0	3/3	1/27	1/27	0,04
					2	1	2/3	6/27	6/27	0,22
					1	2	1/3	12/27	12/27	0,44
					0	3	0/3	8/27	8/27	0,30
	2/3	2	1		2	0	2/3	3/27	1/9	0,11
					1	1	1/3	12/27	4/9	0,44
					0	2	0/3	12/27	4/9	0,44
	1/3	1	2		1	0	1/3	3/9	1/3	0,33
					0	1	0/3	6/9	2/3	0,67
	0/3	0	3		0	0	0/3	1/1	1/1	1,00
4	4/4	4	0		4	0	4/4	1/81	1/81	0,01
					3	1	3/4	8/81	8/81	0,10
					2	2	2/4	24/81	24/81	0,30
					1	3	1/4	32/81	32/81	0,40
					0	4	0/4	16/81	16/81	0,20
	3/4	3	1		3	0	3/4	4/108	1/27	0,04
					2	1	2/4	24/108	6/27	0,22
					1	2	1/4	48/108	12/27	0,44
					0	3	0/4	32/108	8/27	0,30
	2/4	2	2		2	0	2/4	6/54	1/9	0,11
					1	1	1/4	24/54	4/9	0,44
					0	2	0/4	24/54	4/9	0,44
	1/4	1	3		1	0	1/4	4/12	1/3	0,33
					0	1	0/4	8/12	2/3	0,67
	0/4	0	4		0	0	0/4	1/1	1/1	1,00

TABELLE POSITIV-SCHLUSS p(X → Y) = r/n *⟶ p(X ∧ Y) = s/n, für n = 5 (Seite 2)

n	p(X →Y)			*⟶			p(X ∧ Y)	p^T ungek.	p^T gekürzt	p^T dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	a+c+d	b		a	c +d	$\frac{a}{a+b+c+d}$			
5	5/5	5	0		5	0	5/5	1/243	1/243	≈0,00
					4	1	4/5	10/243	10/243	0,04
					3	2	3/5	40/243	40/243	0,17
					2	3	2/5	80/243	80/243	0,33
					1	4	1/5	80/243	80/243	0,33
					0	5	0/5	32/243	32/243	0,13
	4/5	4	1		4	0	4/5	5/405	1/81	0,01
					3	1	3/5	40/405	8/81	0,10
					2	2	2/5	120/405	24/81	0,30
					1	3	1/5	160/405	32/81	0,40
					0	4	0/5	80/405	16/81	0,20
	3/5	3	2		3	0	3/5	10/270	1/27	0,04
					2	1	2/5	60/270	6/27	0,22
					1	2	1/5	120/270	12/27	0,44
					0	3	0/5	80/270	8/27	0,30
	2/5	2	3		2	0	2/5	10/90	1/9	0,11
					1	1	1/5	40/90	4/9	0,44
					0	2	0/5	40/90	4/9	0,44
	1/5	1	4		1	0	1/5	5/15	1/3	0,33
					0	1	0/5	10/15	2/3	0,67
	0/5	0	5		0	0	0/5	1/1	1/1	1,00

TABELLE POSITIV-SCHLUSS p(X → Y) = r/n *⟶ p(X ∧ Y) = s/n, für n = 6 (Seite 3)

n	P(X →Y)			*⟶			p(X ∧ Y)	p^T ungek.	p^T gekürzt	p^T dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	a+c+d	b		a	c+d	$\frac{a}{a+b+c+d}$			
6	6/6	6	0		6	0	6/6	1/729	1/729	≈0,00
					5	1	5/6	12/729	12/729	0,02
					4	2	4/6	60/729	60/729	0,08
					3	3	3/6	160/729	160/729	0,22
					2	4	2/6	240/729	240/729	0,36
					1	5	1/6	192/729	192/729	0,26
					0	6	0/6	64/729	64/729	0,09
	5/6	5	1		5	0	5/6	6/1458	1/243	≈0,00
					4	1	4/6	60/1458	10/243	0,04
					3	2	3/6	240/1458	40/243	0,17
					2	3	2/6	480/1458	80/243	0,33
					1	4	1/6	480/1458	80/243	0,33
					0	5	0/6	192/1458	32/243	0,13
	4/6	4	2		4	0	4/6	15/1215	1/81	0,01
					3	1	3/6	120/1215	8/81	0,10
					2	2	2/6	360/1215	24/81	0,30
					1	3	1/6	480/1215	32/81	0,40
					0	4	0/6	240/1215	16/81	0,20
	3/6	3	3		3	0	3/6	20/540	1/27	0,04
					2	1	2/6	120/540	6/27	0,33
					1	2	1/6	240/540	12/27	0,44
					0	3	0/6	160/540	8/27	0,30
	2/6	2	4		2	0	2/6	15/135	1/9	0,11
					1	1	1/6	60/135	4/9	0,44
					0	2	0/6	60/135	4/9	0,44
	1/6	1	5		1	0	1/6	6/18	1/3	0,33
					0	1	0/6	12/18	2/3	0,67
	0/6	0	6		0	0	0/6	1/1	1/1	1,00

Jede einzelne Kolonne von p^T ergänzt sich zum Wert 1, z. B 729/729 = 1.
Nur in der Dezimaldarstellung ergeben sich durch Aufrundungen und Abrundungen auf 2 Stellen hinter dem Komma nicht immer genau 1,00.
Für die *ungekürzten* Werte ergeben sich im Vergleich zu den *gekürzten* Werten folgende *Multiplikationsfaktoren*:
z. B.: bei n = 5: x 1, x 5, x 10, x 10, x 5, x 1, bei n = 6: x 1, x 6, x 15, x 20, x 15, x 6, x 1

5-4-3-3 TABELLE KONJUNKTION $p(X \rightarrow Y) = r/n$ $^{+}\wedge^{-}$ $p(X \wedge Y) = s/n$ für n = 1 bis n = 4 (Seite 1)

n	$p(X \rightarrow Y)$			$^{+}\wedge^{-}$			$p(X \wedge Y)$	p^T	p^T dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	a+c +d	b		a	c + d	$\frac{a}{a+b+c+d}$		
1	1/1	1	0		1	0	1/1	1/4	0,25
					0	1	0/1	2/4	0,5
	0/1	0	1		0	0	0/1	1/4	0,25
								4/4 = 1	1,00
2	2/2	2	0		2	0	2/2	1/16	0,06
					1	1	1/2	4/16	0,25
					0	2	0/2	4/16	0,25
	1/2	1	1		1	0	1/2	2/16	0,13
					0	1	0/2	4/16	0,25
	0/2	0	2		0	0	0/2	1/16	0,06
								16/16=1	1,00
3	3/3	3	0		3	0	3/3	1/64	0,02
					2	1	2/3	6/64	0,09
					1	2	1/3	12/64	0,19
					0	3	0/3	8/64	0,13
	2/3	2	1		2	0	2/3	3/64	0,05
					1	1	1/3	12/64	0,19
					0	2	0/3	12/64	0,19
	1/3	1	2		1	0	1/3	3/64	0,05
					0	1	0/3	6/64	0,09
	0/3	0	3		0	0	0/3	1/64	0,02
								64/64=1	1,00
4	4/4	4	0		4	0	4/4	1/256	≈0,00
					3	1	3/4	8/256	0,03
					2	2	2/4	24/256	0,09
					1	3	1/4	32/256	0,13
					0	4	0/4	16/256	0,06
	3/4	3	1		3	0	3/4	4/256	0,02
					2	1	2/4	24/256	0,09
					1	2	1/4	48/256	0,19
					0	3	0/4	32/256	0,13
	2/4	2	2		2	0	2/4	6/256	0,02
					1	1	1/4	24/256	0,09
					0	2	0/4	24/256	0,09
	1/4	1	3		1	0	1/4	4/256	0,02
					0	1	0/4	8/256	0,03
	0/4	0	4		0	0	0/4	1/256	≈0,00
								256/256=1	1,00

TABELLE KONJUNKTION p(X → Y) = r/n $^{+}\wedge^{-}$ p(X ∧ Y) = s/n, für n = 5 (Seite 2)

n	p(X →Y)			$^{+}\wedge^{-}$			p(X ∧ Y)	p^T	p^T	p^T dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	a+c+d	b		a	c+d	$\frac{a}{a+b+c+d}$	Zähler	Nenner	
5	5/5	5	0		5	0	5/5	1/	1024	≈0,00
					4	1	4/5	10/		0,01
					3	2	3/5	40/		0,04
					2	3	2/5	80/		0,08
					1	4	1/5	80/		0,08
					0	5	0/5	32/		0,09
	4/5	4	1		4	0	4/5	5/		0,01
					3	1	3/5	40/		0,04
					2	2	2/5	120/		0,12
					1	3	1/5	160/		0,16
					0	4	0/5	80/		0,08
	3/5	3	2		3	0	3/5	10/		0,01
					2	1	2/5	60/		0,06
					1	2	1/5	120/		0,12
					0	3	0/5	80/		0,08
	2/5	2	3		2	0	2/5	10/		0,01
					1	1	1/5	40/		0,04
					0	2	0/5	40/		0,04
	1/5	1	4		1	0	1/5	5/		0,01
					0	1	0/5	10/		0,01
	0/5	0	5		0	0	0/5	1/		≈0,00
								1024/	1024	1,00

TABELLE KONJUNKTION $p(X \rightarrow Y) = r/n \;\; {}^{+}{\wedge}^{-} \;\; p(X \wedge Y) = s/n$, für n = 6 (Seite 3)

n	$p(X \rightarrow Y)$			${}^{+}{\wedge}^{-}$			$p(X \wedge Y)$	p^T	p^T	p^T dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	a+c+d	b		a	c+d	$\frac{a}{a+b+c+d}$	Zähler	Nenner	
6	6/6	6	0		6	0	6/6	1/	4096	≈0,00
					5	1	5/6	12/		≈0,00
					4	2	4/6	60/		0,02
					3	3	3/6	160/		0,04
					2	4	2/6	240/		0,06
					1	5	1/6	192/		0,05
					0	6	0/6	64/		0,02
	5/6	5	1		5	0	5/6	6/		≈0,00
					4	1	4/6	60/		0,02
					3	2	3/6	240/		0,06
					2	3	2/6	480/		0,12
					1	4	1/6	480/		0,12
					0	5	0/6	192/		0,05
	4/6	4	2		4	0	4/6	15/		≈0,00
					3	1	3/6	120/		0,03
					2	2	2/6	360/		0,09
					1	3	1/6	480/		0,12
					0	4	0/6	240/		0,06
	3/6	3	3		3	0	3/6	20/		0,01
					2	1	2/6	120/		0,03
					1	2	1/6	240/		0,06
					0	3	0/6	160/		0,04
	2/6	2	4		2	0	2/6	15/		≈0,00
					1	1	1/6	60/		0,02
					0	2	0/6	60/		0,02
	1/6	1	5		1	0	1/6	6/		≈0,00
					0	1	0/6	12/		≈0,00
	0/6	0	6		0	0	0/6	1/		≈0,00
								4096/	4096	1,00

Die gesamte Kolonne von p^T ergänzt sich zum Wert 1.
Nur in der Dezimaldarstellung ergibt sich durch Aufrundungen und Abrundungen auf 2 Stellen hinter dem Komma nicht genau 1,00.

5-4-3-4 TABELLE SCHLUSS $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$, *für n = 1 bis n = 4* (Seite 1)

n	$p(X \rightarrow Y)$			$\longrightarrow$			$p(X \wedge Y)$	$p^T \wedge$	$p^T \rightarrow$	p^Tdez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	a+c+d	b		a	c+d	$\frac{a}{a+b+c+d}$			
1	1/1	1	0		1	0	1/1	1/4	2/4	0,50
					0	1	0/1	2/4	3/4	0,75
	0/1	0	1		0	0	0/1	1/4	4/4	1,00
								4/4 = 1	9/4	
2	2/2	2	0		2	0	2/2	1/16	8/16	0,50
					1	1	1/2	4/16	11/16	0,69
					0	2	0/2	4/16	11/16	0.69
	1/2	1	1		1	0	1/2	2/16	12/16	0,75
					0	1	0/2	4/16	14/16	0,88
	0/2	0	2		0	0	0/2	1/16	16/16	1,00
								16/16 = 1		
3	3/3	3	0		3	0	3/3	1/64	38/64	0,59
					2	1	2/3	6/64	43/64	0,67
					1	2	1/3	12/64	49/64	0,77
					0	3	0/3	8/64	45/64	0,70
	2/3	2	1		2	0	2/3	3/64	40/64	0,63
					1	1	1/3	12/64	49/64	0,63
					0	2	0/3	12/64	49/64	0,77
	1/3	1	2		1	0	1/3	3/64	58/64	0,91
					0	1	0/3	6/64	61/64	0,95
	0/3	0	3		0	0	0/3	1/64	64/64	1,00
								64/64 = 1		
4	4/4	4	0		4	0	4/4	1/256	176/256	0,69
					3	1	3/4	8/256	183/256	0,72
					2	2	2/4	24/256	199/256	0,78
					1	3	1/4	32/256	297/256	0,81
					0	4	0/4	16/256	191/256	0,75
	3/4	3	1		3	0	3/4	4/256	152/256	0,59
					2	1	2/4	24/256	172/256	0,67
					1	2	1/4	48/256	196/256	0,77
					0	3	0/4	32/256	180/256	0,70
	2/4	2	2		2	0	2/4	6/256	208/256	0,81
					1	1	1/4	24/256	226/256	0,88
					0	2	0/4	24/256	226/256	0,88
	1/4	1	3		1	0	1/4	4/256	248/256	0,97
					0	1	0/4	8/256	252/256	0,98
	0/4	0	4		0	0	0/4	1/256	256/256	1,00
								256/256=1		

TABELLE SCHLUSS $p(X \to Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$, *für n = 5* (Seite 2)

n	p(X →Y)			⟶			p(X ∧ Y)	$p^T \wedge$	$p^T \to$	$p^T \to$ dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	a+c+d	b		a	c+d	$\frac{a}{a+b+c+d}$	Nenner 1024	Nenner 1024	
5	5/5	5	0		5	0	5/5	1/	782/	0,76
					4	1	4/5	10/	791/	0,77
					3	2	3/5	40/	821/	0,80
					2	3	2/5	80/	861/	0,84
					1	4	1/5	80/	861/	0,84
					0	5	0/5	32/	813/	0,79
	4/5	4	1		4	0	4/5	5/	624/	0,61
					3	1	3/5	40/	659/	0,64
					2	2	2/5	120/	739/	0,72
					1	3	1/5	160/	779/	0,76
					0	4	0/5	80/	699/	0,68
	3/5	3	2		3	0	3/5	10/	764/	0,75
					2	1	2/5	60/	814/	0,80
					1	2	1/5	120/	874/	0,85
					0	3	0/5	80/	834/	0,82
	2/5	2	3		2	0	2/5	10/	944/	0,92
					1	1	1/5	40/	974/	0,95
					0	2	0/5	40/	974/	0,95
	1/5	1	4		1	0	1/5	5/	1014/	0,99
					0	1	0/5	10/	1019/	≈1,00
	0/5	0	5		0	0	0/5	1/	1024/	1,00
								1024/		

TABELLE SCHLUSS $p(X \to Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$, *für n = 6* (Seite 3)

n	$P(X \to Y)$			$\longrightarrow$			$p(X \wedge Y)$	$p^T \wedge$	$p^T \to$	$p^T \to$dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	a+c+d	b		a	c+d	$\frac{a}{a+b+c+d}$	Nenner 4096	Nenner 4096	
6	6/6	6	0		6	0	6/6	1/	3368/	0,82
					5	1	5/6	12/	3379/	0,83
					4	2	4/6	60/	3427/	0,84
					3	3	3/6	160/	3527/	0,86
					2	4	2/6	240/	3607/	0,88
					1	5	1/6	192/	3559/	0,87
					0	6	0/6	64/	3431/	0,84
	5/6	5	1		5	0	5/6	6/	2644/	0,65
					4	1	4/6	60/	2698/	0,66
					3	2	3/6	240/	2878/	0,70
					2	3	2/6	480/	3118/	0,76
					1	4	1/6	480/	3118/	0,76
					0	5	0/6	192/	2830/	0,69
	4/6	4	2		4	0	4/6	15/	2896/	0,71
					3	1	3/6	120/	3001/	0,73
					2	2	2/6	360/	3241/	0,79
					1	3	1/6	480/	3361/	0,82
					0	4	0/6	240/	3121/	0,76
	3/6	3	3		3	0	3/6	20/	3576/	0,87
					2	1	2/6	120/	3676/	0,90
					1	2	1/6	240/	3796/	0,93
					0	3	0/6	160/	3716/	0,91
	2/6	2	4		2	0	2/6	15/	3976/	0,97
					1	1	1/6	60/	4021/	0,98
					0	2	0/6	60/	4021/	0,98
	1/6	1	5		1	0	1/6	6/	4084/	≈1,00
					0	1	0/6	12/	4090/	≈1,00
	0/6	0	6		0	0	0/6	1/	4096/	
								4096	4096	1,00

Zur Berechnung eines Wertes $p^T[p(X \to Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n]$ ist (wie im Text erläutert) folgendes zu berücksichtigen: *falsch* ist diese Relation nur, wenn $p(X \to Y) = r/n \wedge p(X \wedge Y) \neq s/n$. Die p^T-Werte dieser falschen Relationen werden vom Wert $p^T = 1$ abgezogen.

Ein einfaches Beispiel:

$p^T[p(X \to Y) = 2/6 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 2/6] = 4096/4096 - 60/4096 - 60/4096 = 3976/4096 = 0,97$.

Voraussetzung ist dabei: $p(X \to Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n$; somit $s \leq r$.

Eine generelle Formel zur Berechnung $p^T[p(X \to Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n]$ ist noch nicht entwickelt.

5-4-3-5 KOMBINIERTE POSITIV-SCHLÜSSE

1. $p(X \rightarrow Y)$ $*\!\longrightarrow$ $p(X *\!\!\rightarrow Y)$, $p(X \rfloor Y)$, $p(X \wedge Y)$ usw.
2. $p(X \wedge Y)$ $*\!\longrightarrow$ $p(X \vee Y)$, $p(X \rightarrow Y)$, $p(X >\!- Y)$ usw.
3. $p(X \leftrightarrow Y)$ $*\!\longrightarrow$ $p(X \vee Y)$, $p(X \rightarrow Y)$, $p(X \wedge Y)$ usw.

Ein *Positiv-Schluss* ist ein Schluss, bei dem die *Positiv-Implikation* $*\!\!\rightarrow$ verwendet wird.

TABELLE: POSITIV-SCHLUSS $p(X \rightarrow Y) = r/n$ $*\longrightarrow$ $p(X\ R\ Y) = s/n$ (Seite 1)

Prämisse = Implikation $\rightarrow$, R = $*\rightarrow$, $\rfloor$, $\wedge$ u. ä., für n = 1 bis n = 4

n	$p(X \rightarrow Y)$	$*\longrightarrow$	$p(X{*}{\rightarrow}Y)$	$p(X) = p(X \rfloor Y)$	$p(X \wedge Y)$	p^T ungek.	p^T gekürzt	p^T dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a}{a+b}$	$\frac{a+b}{a+b+c+d}$	$\frac{a}{a+b+c+d}$			
1	1/1		1/1	1/1	1/1	1/3	1/3	0,33
			0/0	0/1	0/1	2/3	2/3	0,67
	0/1		0/1	1/1	0/1	1/1	1/1	1,00
2	2/2		2/2	2/2	2/2	1/9	1/9	0,11
			1/1	1/2	1/2	4/9	4/9	0,44
			0/0	0/2	0/2	4/9	4/9	0,44
	1/2		1/2	2/2	1/2	2/6	1/3	0,33
			0/1	1/2	0/2	4/6	2/3	0,67
	0/2		0/2	2/2	0/2	1/1	1/1	1,00
3	3/3		3/3	3/3	3/3	1/27	1/27	0,04
			2/2	2/3	2/3	6/27	6/27	0,22
			1/1	1/3	1/3	12/27	12/27	0,44
			0/0	0/3	0/3	8/27	8/27	0,30
	2/3		2/3	3/3	2/3	3/27	1/9	0,11
			1/2	2/3	1/3	12/27	4/9	0,44
			0/1	1/3	0/3	12/27	4/9	0,44
	1/3		1/3	3/3	1/3	3/9	1/3	0,33
			0/2	2/3	0/3	6/9	2/3	0,67
	0/3		0/3	3/3	0/3	1/1	1/1	1,00
4	4/4		4/4	4/4	4/4	1/81	1/81	0,01
			3/3	3/4	3/4	8/81	8/81	0,10
			2/2	2/4	2/4	24/81	24/81	0,30
			1/1	1/4	1/4	32/81	32/81	0,40
			0/0	0/4	0/4	16/81	16/81	0,20
	3/4		3/4	4/4	3/4	4/108	1/27	0,04
			2/3	3/4	2/4	24/108	6/27	0,22
			1/2	2/4	1/4	48/108	12/27	0,44
			0/1	1/4	0/4	32/108	8/27	0,30
	2/4		2/4	4/4	2/4	6/54	1/9	0,11
			1/3	3/4	1/4	24/54	4/9	0,44
			0/2	2/4	0/4	24/54	4/9	0,44
	1/4		1/4	4/4	1/4	4/12	1/3	0,33
			0/3	3/4	0/4	8/12	2/3	0,67
	0/4		0/4	4/4	0/4	1/1	1/1	1,00

TABELLE: POSITIV-SCHLUSS $p(X \to Y) = r/n$ *⟶ $p(X\ R\ Y) = s/n$ (Seite 2)

Prämisse = Implikation $\to$, R = $\vee, \leftarrow, \leftrightarrow$ u. ä., für n = 1 bis n = 4

N	$p(X \to Y)$	*⟶	$p(X \vee Y)$	$p(X \leftarrow Y)$	$p(X \leftrightarrow Y)$	p^T ungek.	p^T gekürzt	p^T dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a+b+c}{a+b+c+d}$	$\frac{a+b+d}{a+b+c+d}$	$\frac{a+d}{a+b+c+d}$			
1	1/1		1/1	1/1	1/1	2/3	2/3	0,67
			0/1	0/1	0/1	1/3	1/3	0,33
	0/1		1/1	1/1	0/1	1/1	1/1	1,00
2	2/2		2/2	2/2	2/2	4/9	4/9	0,44
			1/2	1/2	1/2	4/9	4/9	0,44
			0/2	0/2	0/2	1/9	1/9	0,11
	1/2		2/2	2/2	1/2	4/6	2/3	0,67
			1/2	1/2	0/2	2/6	1/3	0,33
	0/2		2/2	2/2	0/2	1/1	1/1	1,00
3	3/3		3/3	3/3	3/3	8/27	8/27	0,30
			2/3	2/3	2/3	12/27	12/27	0,44
			1/3	1/3	1/3	6/27	6/27	0,22
			0/3	0/3	0/3	1/27	1/27	0,04
	2/3		3/3	3/3	2/3	12/27	4/9	0,44
			2/3	2/3	1/3	12/27	4/9	0,44
			1/3	1/3	0/3	3/27	1/9	0,11
	1/3		3/3	3/3	1/3	6/9	2/3	0,67
			2/3	2/3	0/3	3/9	1/3	0,33
	0/3		3/3	3/3	0/3	1/1	1/1	1,00
4	4/4		4/4	4/4	4/4	16/81	16/81	0,20
			3/4	3/4	3/4	32/81	32/81	0,40
			2/4	2/4	2/4	24/81	24/81	0,30
			1/4	1/4	1/4	8/81	8/81	0,10
			0/4	0/4	0/4	1/81	1/81	0,01
	3/4		4/4	4/4	3/4	32/108	8/27	0,30
			3/4	3/4	2/4	48/108	12/27	0,44
			2/4	2/4	1/4	24/108	6/27	0,22
			1/4	1/4	0/4	4/108	1/27	0,04
	2/4		4/4	4/4	2/4	24/54	4/9	0,44
			3/4	3/4	1/4	24/54	4/9	0,44
			2/4	2/4	0/4	6/54	1/9	0,11
	1/4		4/4	4/4	1/4	8/12	2/3	0,67
			3/4	3/4	0/4	4/12	1/3	0,33
	0/4		4/4	4/4	0/4	1/1	1/1	1,00

TABELLE: POSITIV-SCHLUSS p(X ∧ Y) = r/n *⟶ p(X R Y) = s/n (Seite 1)

Prämisse = Konjunktion ∧, R = ⌋, >– u. ä., für n = 1 bis n = 4

N	p(X ∧ Y)	*⟶	p(X) = p(X ⌋ Y)	p(X >– Y)	p^T ungek.	p^T gekürzt	p^T dez.
	$\frac{a}{a+b+c+d}$		$\frac{a+b}{a+b+c+d}$	$\frac{b}{a+b+c+d}$			
1	1/1		1/1	0/1	1/1	1/1	1,00
	0/1		1/1	1/1	1/3	1/3	0,33
			0/1	0/1	2/3	2/3	0,67
2	2/2		2/2	0/2	1/1	1/1	1,00
	1/2		2/2	1/2	2/6	1/3	0,33
			1/2	0/2	4/6	2/3	0,67
	0/1		2/2	2/2	1/9	1/9	0,11
			1/2	1/2	4/9	4/9	0,44
			0/2	0/2	4/9	4/9	0,44
3	3/3		3/3	0/3	1/1	1/1	1,00
	2/3		3/3	1/3	3/9	1/3	0,33
			2/3	0/3	6/9	2/3	0,67
	1/3		3/3	2/3	3/27	1/9	0,11
			2/3	1/3	12/27	4/9	0,44
			1/3	0/3	12/27	4/9	0,44
	0/3		3/3	3/3	1/27	1/27	0,04
			2/3	2/3	6/27	6/27	0,22
			1/3	1/3	12/27	12/27	0,44
			0/3	0/3	8/27	8/27	0,30
4	4/4		4/4	0/4	1/1	1/1	1,00
	3/4		4/4	1/4	4/12	1/3	0,33
			3/4	0/4	8/12	2/3	0,67
	2/4		4/4	2/4	6/54	1/9	0,11
			3/4	1/4	24/54	4/9	0,44
			2/4	0/4	24/54	4/9	0,44
	1/4		4/4	3/4	4/108	1/27	0,04
			3/4	2/4	24/108	6/27	0,22
			2/4	1/4	48/108	12/27	0,44
			1/4	0/4	32/108	8/27	0,30
	0/4		4/4	4/4	1/81	1/81	0,01
			3/4	3/4	8/81	8/81	0,10
			2/4	2/4	24/81	24/81	0,30
			1/4	1/4	32/81	32/81	0,40
			0/4	0/4	16/81	16/81	0,20

TABELLE: POSITIV-SCHLUSS $p(X \wedge Y) = r/n$ $*\longrightarrow$ $p(X\ R\ Y) = s/n$ (Seite 2)

Prämisse = Konjunktion $\wedge$, R = $\rightarrow$, $\vee$ u. ä., für n = 1 bis n = 4

N	$p(X \wedge Y)$	$*\longrightarrow$	$p(X \rightarrow Y)$	$p(X \vee Y)$	p^T ungek.	p^T gekürzt	p^T dez.
	$\frac{a}{a+b+c+d}$		$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	$\frac{a+b+c}{a+b+c+d}$			
1	1/1		1/1	1/1	1/1	1/1	1,00
	0/1		1/1	1/1	2/3	2/3	0,67
			0/1	0/1	1/3	1/3	0,33
2	2/2		2/2	2/2	1/1	1/1	1,00
	1/2		2/2	2/2	4/6	2/3	0,67
			1/2	1/2	2/6	1/3	0,33
	0/2		2/2	2/2	4/9	4/9	0,44
			1/2	1/2	4/9	4/9	0,44
			0/2	0/2	1/9	1/9	0,11
3	3/3		3/3	3/3	1/1	1/1	1,00
	2/3		3/3	3/3	6/9	2/3	0,67
			2/3	2/3	3/9	1/3	0,33
	1/3		3/3	3/3	12/27	4/9	0,44
			2/3	2/3	12/27	4/9	0,44
			1/3	1/3	3/27	1/9	0,11
	0/3		3/3	3/3	8/27	8/27	0,30
			2/3	2/3	12/27	12/27	0,44
			1/3	1/3	6/27	6/27	0,22
			0/3	0/3	1/27	1/27	0,04
4	4/4		4/4	4/4	1/1	1/1	1,00
	3/4		4/4	4/4	8/12	2/3	0,67
			3/4	3/4	4/12	1/3	0,33
	2/4		4/4	4/4	24/54	4/9	0,44
			3/4	3/4	24/54	4/9	0,44
			2/4	2/4	6/54	1/9	0,11
	1/4		4/4	4/4	32/108	8/27	0,30
			3/4	3/4	48/108	12/27	0,44
			2/4	2/4	24/108	6/27	0,22
			1/4	1/4	4/108	1/27	0,04
	0/4		4/4	4/4	16/81	16/81	0,20
			3/4	3/4	32/81	32/81	0,40
			2/4	2/4	24/81	24/81	0,30
			1/4	1/4	8/81	8/81	0,10
			0/4	0/4	1/81	1/81	0,01

TABELLE: POSITIV-SCHLUSS p(X ↔ Y) = r/n *⟶ p(X R Y) = s/n (Seite 1)

Prämisse = Äquivalenz ↔, R = →, ← u. ä., für n = 1 bis n = 4

n	p(X ↔ Y)	*⟶	p(X → Y)	p(X ← Y)	p^T ungek.	p^T gekürzt	p^T dez.
	$\frac{a+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	$\frac{a+b+d}{a+b+c+d}$			
1	1/1		1/1	1/1	2/2	1/1	1,00
	0/1		1/1	1/1	1/2	1/2	0,50
			0/1	0/1	1/2	1/2	0,50
2	2/2		2/2	2/2	4/4	1/1	1,00
	1/2		2/2	2/2	4/8	1/2	0,50
			1/2	1/2	4/8	1/2	0,50
	0/2		2/2	2/2	1/4	1/4	0,25
			1/2	1/2	2/4	2/4	0,50
			0/2	0/2	1/4	1/4	0,25
3	3/3		3/3	3/3	8/8	1/1	1,00
	2/3		3/3	3/3	12/24	1/2	0,50
			2/3	2/3	12/24	1/2	0,50
	1/3		3/3	3/3	6/24	1/4	0,25
			2/3	2/3	12/24	2/4	0,50
			1/3	1/3	6/24	1/4	0,25
	0/3		3/3	3/3	1/8	1/8	0,13
			2/3	2/3	3/8	3/8	0,38
			1/3	1/3	3/8	3/8	0,38
			0/3	0/3	1/8	1/8	0,13
4	4/4		4/4	4/4	16/16	1/1	1,00
	3/4		4/4	4/4	32/64	1/2	0,50
			3/4	3/4	32/64	1/2	0,50
	2/4		4/4	4/4	24/96	1/4	0,25
			3/4	3/4	48/96	2/4	0,50
			2/4	2/4	24/96	1/4	0,25
	1/4		4/4	4/4	8/64	1/8	0,13
			3/4	3/4	24/64	3/8	0,38
			2/4	2/4	24/64	3/8	0,38
			1/4	1/4	8/64	1/8	0,13
	0/4		4/4	4/4	1/16	1/16	0,06
			3/4	3/4	4/16	4/16	0,25
			2/4	2/4	6/16	6/16	0,38
			1/4	1/4	4/16	4/16	0,25
			0/4	0/4	1/16	1/16	0,06

TABELLE: POSITIV-SCHLUSS p(X ↔ Y) = r/n *⟶ p(X R Y) = s/n (Seite 2)

Prämisse = Äquivalenz ↔, R = ∧, ∇ u. ä., für n = 1 bis n = 4

n	p(X ↔ Y)	*⟶	p(X ∧ Y)	p(X ∇ Y)	p^T ungek.	p^T gekürzt	p^T dez.
	$\frac{a+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a}{a+b+c+d}$	$\frac{d}{a+b+c+d}$			
1	1/1		1/1	1/1	1/2	1/2	0,50
			0/1	0/1	1/2	1/2	0,50
	0/1		0/1	0/1	2/2	2/2	1,00
2	2/2		2/2	2/2	1/4	1/4	0,25
			1/2	1/2	2/4	2/4	0,50
			0/2	0/2	1/4	1/4	0,25
	1/2		1/2	1/2	4/8	1/2	0,50
			0/2	0/2	4/8	1/2	0,50
	0/2		0/2	0/2	4/4	1/1	1,00
3	3/3		3/3	3/3	1/8	1/8	0,13
			2/3	2/3	3/8	3/8	0,38
			1/3	1/3	3/8	3/8	0,38
			0/3	0/3	1/8	1/8	0,13
	2/3		2/3	2/3	6/24	1/4	0,25
			1/3	1/3	12/24	2/4	0,50
			0/3	0/3	6/24	1/4	0,25
	1/3		1/3	1/3	12/24	1/2	0,50
			0/3	0/3	12/24	1/2	0,50
	0/3		0/3	0/3	8/8	1/1	1,00
4	4/4		4/4	4/4	1/16	1/16	0,06
			3/4	3/4	4/16	4/16	0,25
			2/4	2/4	6/16	6/16	0,38
			1/4	1/4	4/16	4/16	0,25
			0/4	0/4	1/16	1/16	0,06
	3/4		3/4	3/4	8/64	1/8	0,13
			2/4	2/4	24/64	3/8	0,38
			1/4	1/4	24/64	3/8	0,38
			0/4	0/4	8/64	1/8	0,13
	2/4		2/4	2/4	24/96	1/4	0,25
			1/4	1/4	48/96	2/4	0,50
			0/4	0/4	24/96	1/4	0,25
	1/4		1/4	1/4	32/64	1/2	0,50
			0/4	0/4	32/64	1/2	0,50
	0/4		0/4	0/4	16/16	1/1	1,00

5-4-3-6 ÜBERBLICK: META-WERTE VON SCHLÜSSEN

1) Tautologie versus Kontradiktion

	Tautologie	*Kontradiktion*
A) *qualitativ*	$X \wedge Y \Rightarrow Y$	$(X \vee \neg X) \not\Rightarrow (Y \wedge \neg Y)$
1. theoret. Wahrsch.	$p^T = 4/4 = 1$	$p^T = 4/4 = 0$
2. Tautologie-Grad	$p^T = 4/4 = 1$	$p^T = 4/4 = 0$
3. Informationsgehalt	$p^I = 0/4 = 0$	$p^I = 4/4$: nicht definiert
4. Bestimmtheit	$p^B = 1/4$	$p^I = 1/0$: nicht definiert
5. Modalität	$p^M = 4/4 = 1$ (notwendig)	$p^M = 0/4 = 0$ (unmöglich)
6. Abhängigkeit	$p^A = \|4/4 - 0/4\| = 4/4 = 1$	$p^A = \|0/4 - 4/4\| = 4/4 = 1$
B) *quantitativ* (z. B.)	$p(X \wedge Y) = 3/3 \Rightarrow$ $p(Y) = 3/3$	$p(X \vee \neg X) = 3/3 \not\Rightarrow$ $p(Y \wedge \neg Y) = 3/3$
1. theoret. Wahrsch.	$p^T = 64/64 = 1$	$p^T = 0/64 = 0$
2. Tautologie-Grad	$p^T = 64/64 = 1$	$p^T = 0/64 = 0$
3. Informationsgehalt	$p^I = 0/64 = 0$	$p^I = 64/64$: nicht definiert
4. Bestimmtheit	$p^B = 1/64$	$p^B = 1/0$: nicht definiert
5. Modalität	$p^M = 64/64 = 1$ (notwendig)	$p^M = 0/64 = 0$ (unmöglich)
6. Abhängigkeit	$p^A = \|64/64 - 0/64\| = 64/64 = 1$	$p^A = \|0/64 - 64/64\| = 64/64 = 1$

Anmerkungen:

• Beim kontradiktorischen Satz gilt:

$p(X \vee \neg X) = 3/3 \not\Rightarrow p(Y \wedge \neg Y) = 3/3 = 1$. *Nicht*: Schluss-Satz $p(Y \wedge \neg Y) = 0/3 = 0$.
Denn das wäre eine Tautologie: $p(X \vee \neg X) = 3/3 \Rightarrow p(Y \wedge \neg Y) = 0/3 = 0$

• Man kann die *nicht-definierten* Werte zwar numerisch angeben, aber sie sind nicht zu verwenden. Z. B. ist es sinnlos, dass der Informationsgehalt einer Kontradiktion den Maximalwert 1 besitzen soll. Und es ist „verboten“, durch = zu dividieren.

• Bei *analytischen* (tautologischen oder kontradiktorischen) Sätzen gibt p^A den Grad der analytischen Abhängigkeit an. Der ist bei Tautologie und Kontradiktion gleich, nur bei der Tautologie: *positive* Abhängigkeit, bei der Kontradiktion: *negative* Abhängigkeit.

2) Analytisch versus semi-analytisch

	analytisch	*semi-analytisch*
A) *qualitativ* (z. B.)	$X \rightarrow Y \Rightarrow \neg(X \wedge \neg Y)$	$X \rightarrow Y \longrightarrow X \wedge Y$
1. theoret. Wahrsch.	$p^T = 4/4 = 1$	$p^T = 2/4 = 0{,}5$
2. Tautologie-Grad	$p^T = 4/4 = 1$	$p^T = 2/4 = 0{,}5$
3. Informationsgehalt	$p^I = 0/4 = 0$	$p^I = 2/4 = 0{,}5$
4. Bestimmtheit	$p^B = 1/4 = 0{,}25$	$p^I = 1/2 = 0{,}5$
5. Modalität	$p^M = 4/4 = 1$ (notwendig)	$p^M = 2/4 = 0{,}5$ (möglich)
6. Abhängigkeit	$p^A = \|4/4 - 0/4\| = 4/4 = 1$	$p^A = \|2/4 - 2/4\| = 0/4 = 0$
B) *quantitativ* (z. B.)	$p(X \rightarrow Y) = 3/3 \Rightarrow$ $p(\neg(X \wedge \neg Y)) = 3/3$	$p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow$ $p(X \wedge Y) = 3/3$
1. theoret. Wahrsch.	$p^T = 64/64 = 1$	$p^T = 38/64 = 0{,}59$
2. Tautologie-Grad	$p^T = 64/64 = 1$	$p^T = 38/64 = 0{,}59$
3. Informationsgehalt	$p^I = 0/64 = 0$	$p^I = 26/64 = 0{,}41$
4. Bestimmtheit	$p^B = 1/64$	$p^B = 1/38$
5. Modalität	$p^M = 64/64 = 1$ (notwendig)	$p^M = 38/64 = 0{,}59$ (möglich)
6. Abhängigkeit	$p^A = \|64/64 - 0/64\| = 64/64 = 1$	$p^A = \|38/64 - 26/64\| = 12/64 = 0{,}19$

5-4-3-7 BEZEICHNUNGEN VON SCHLÜSSEN

Man kann Schlüsse danach differenzieren, mit welchem *Grad* (p^T) sie gelten.
Um nicht immer die gleichen Begriffe zu verwenden, habe ich vor allem zwischen folgenden – weitgehend synonymen – *Termini* abgewechselt:

$p^T = 1$	$0 < p^T < 1$	$p^T = 0$
$\Rightarrow$	$\longrightarrow$	$\not\Rightarrow$
strenger Schluss	partieller Schluss	kontradiktorischer „Schluss“
vollständiger	unvollständiger	
deterministischer	statistischer	
(streng) analytischer	semi-analytischer	
tautologischer	semi-tautologischer	
echter	scheinbarer	
voll gültiger	partiell gültiger	
deduktiver	induktiver	
sicherer	wahrscheinlicher	

Die meisten dieser Termin kann man auch auf andere Relationen anwenden, nicht nur auf Implikationen, z. B. ist auch $(X \wedge Y) \,{}^{+}\!\wedge^{-} (X \vee Y)$ semi-analytisch.

Der kontradiktorische „Schluss“ spielt eine geringe Rolle, deswegen benötigt man dafür nicht viele unterschiedliche Begriffe, man kann noch von einem ‚Fehlschluss’ sprechen.

Die obigen Bezeichnungen beziehen sich auf den *Schluss* selbst, auf seine *theoretische* Wahrscheinlichkeit.

Man kann aber auch noch unterscheiden, ob die *Prämisse* (bzw. im Plural) oder der *Schluss-Satz* folgende *empirische* Wahrscheinlichkeit haben:

$p = 1$ oder $p = 0$ haben (deterministisch)
$0 < p < 1$ (statistisch)

Am wichtigsten sind die folgenden Unterscheidungen:

p	p^T	Beispiel .
1 (oder 0)	$< 1 \wedge > 0$	$p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1$
$< 1 \wedge > 0$	1	$p(X \rightarrow Y) = 0{,}5 \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq 0{,}5$
1 (oder)	1	$p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(X \rightarrow Y) = 1$

Den letzten Fall kann man einen *vollständig deterministischen* Schluss nennen,
weil p(Prämisse) = 1, p(Konklusion) = 1 und $p^T = 1$.

5-4-4 Quantitative Aussagen-Logik

Ich habe in 5-4-3-1 sechs *Formeln* zur Berechnung von p^T bei quantitativen Schlüssen mit der *Positiv-Implikation* zusammengefasst. Hier soll nun demonstriert werden, was sich ergibt im
deterministischen (*positiven*) Fall: r = n, s = n bzw. p = 1
im *nullistischen (negativen)* Fall: r = 0, s = 0 bzw. p = 0

5-4-4-1 SCHLUSS VON EINER RELATION MIT STRUKTURELL $p^T = 3/4$
z. B. $X \rightarrow Y$:

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 2/4$ (z. B. $X \leftrightarrow Y$)
  Positiver Fall: p = 1: $p^T = (2/3)^s$
  Beispiel : $p^T[p(X \rightarrow Y) = s/s = 1 \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \leftrightarrow Y) = s/s = 1] = (2/3)^s$
  Negativer Fall: p = 0: $p^T = 1$
  Beispiel : $p^T[p(X \rightarrow Y) = 0 \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \leftrightarrow Y) = 0] = 1$
- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 1/4$ (z. B. $X \wedge Y$)
  positiv: p = 1: $p^T = (1/3)^s$
  $p^T[p(X \rightarrow Y) = s/s = 1 \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \wedge Y) = s/s = 1] = (1/3)^s$
  negativ: p = 0: $p^T = 1$
  $p^T[p(X \rightarrow Y) = 0 \;{*}{\Rightarrow}\; p(X \wedge Y) = 0] = 1$

5-4-4-2 SCHLUSS VON EINER RELATION MIT STRUKTURELL $p^T = 2/4$
z. B. $X \leftrightarrow Y$:

- auf eine Relation mit $p^T = 3/4$ (z. B. $X \rightarrow Y$)
  positiv: p = 1: $p^T = 1$
  $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 1 \;{*}{\Rightarrow}\; p(X \rightarrow Y) = 1] = 1$
  negativ: p = 0: $p^T = (1/2)^n$
  $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 0/n = 0 \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \rightarrow Y) = 0/n = 0] = (1/2)^n$
- auf eine Relation mit $p^T = 1/4$ (z. B. $X \wedge Y$)
  positiv: p = 1: $p^T = (1/2)^s$
  $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = s/s = 1 \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \wedge Y) = s/s = 1] = (1/2)^s$
  negativ: p = 0: $p^T = 1$
  $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 0 \;{*}{\Rightarrow}\; p(X \wedge Y) = 0] = 1$

5-4-4-3 SCHLUSS VON EINER RELATION MIT STRUKTURELL $p^T = 1/4$
z. B. $X \wedge Y$:

- auf eine Relation mit $p^T = 3/4$ (z. B. $X \rightarrow Y$)
  positiv: p = 1: $p^T = 1$
  $p^T[p(X \wedge Y) = 1 \;{*}{\Rightarrow}\; p(X \rightarrow Y) = 1] = 1$
  negativ: p = 0: $p^T = (1/3)^n$
  $p^T[p(X \wedge Y) = 0/n = 0 \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \rightarrow Y) = 0/n = 0] = (1/3)^n$
- auf eine Relation mit $p^T = 2/4$ (z. B. X)
  positiv: p = 1: $p^T = 1$
  $p^T[p(X \wedge Y) = 1 \;{*}{\Rightarrow}\; p(X) = 1] = 1$
  negativ: p = 0: $p^T = (2/3)^n$
  $p^T[p(X \wedge Y) = 0/n = 0 \;{*}{\longrightarrow}\; p(X) = 0/n = 0] = (2/3)^n$

5-4-5 Quantitative Quantoren-Logik

5-4-5-1 SCHLÜSSE MIT DER NORMAL-IMPLIKATION

• Einfache Tautologie

$p^T = (2/2)^n = 1$

$p^T[p(X) = 1 \Rightarrow p(X) > 0]$

$p^T[p(X) = 0 \Rightarrow p(X) < 1]$

• Komplexe Tautologie

$p^T = (4/4)^n = 1$

$p^T[p(X \to Y) = 1 \Rightarrow p(X \to Y) > 0]$

$p^T[p(X \to \neg Y) = 1 \Rightarrow p(X \to \neg Y) > 0]$

$p^T[p(X \to Y) = 0 \Rightarrow p(X \to Y) < 1]$

$p^T[p(X \to \neg Y) = 0 \Rightarrow p(X \to \neg Y) < 1]$

• Einfach semi-analytisch

$p^T = 1/2^{n-1}$

$p^T[p(X) > 0 \longrightarrow p(X) = 1]$

$p^T[p(X) < 1 \longrightarrow p(X) = 0]$

• Komplex semi-analytisch

$p^T = (3^n + 1)/ 4^n$

$p^T[p(X \to Y) > 0 \longrightarrow p(X \to Y) = 1]$

$p^T[p(X \to \neg Y) > 0 \longrightarrow p(X \to \neg Y) = 1]$

$p^T[p(X \to Y) < 1 \longrightarrow p(X \to Y) = 0]$

$p^T[p(X \to \neg Y) < 1 \longrightarrow p(X \to \neg Y) = 0]$

$p^T = (4^n – 2^n)/4^n$

$p^T[p(X \to Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0]$

$p^T[p(X \to \neg Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge \neg Y) > 0]$

Es gilt:

$p = 1$: $p = n/n$

$p < 1$: $p < n/n$

$p = 0$: $p = 0/n$

$p > 0$: $p > 0/n$

Also wäre z. B. der erste Schluss *vollständig* wie folgt zu schreiben:

$p^T[p(X) = n/n = 1 \Rightarrow p(X) > 0/n] = (2/2)^n = 1$

5-4-5-2 SCHLÜSSE MIT DER POSITIV-IMPLIKATION

• *Strenger Schluss: von alle auf einige*

teilweise Verwendung der Positiv-Implikation:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 1 \ast\!\Rightarrow p(X \rightarrow Y) > 0] = 1$

genauer: $p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n \ast\!\Rightarrow p(X \rightarrow Y) > 0/n] = (3/3)^n = 1$

vollständige Verwendung der Positiv-Implikation :

$p^T[p(X \ast\!\rightarrow Y) = 1 \ast\!\Rightarrow p(X \ast\!\rightarrow Y) > 0] = 1$

genauer: $p^T[p(X \ast\!\rightarrow Y) = n/n \ast\!\Rightarrow p(X \ast\!\rightarrow Y) > 0/n] = (1/1)^n = 1$

• *Semi-analytischer Schluss: von einige auf alle*

teilweise Verwendung der Positiv-Implikation:

$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0/n \ \ast\!\longrightarrow \ p(X \rightarrow Y) = n/n] = 3^n/(4^n - 1)$

Beispiel für n = 2 :

$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0/2 \ \ast\!\longrightarrow \ p(X \rightarrow Y) = 2/2] = 3^2/(4^2 - 1) = 9/15 = 3/5 = 0{,}6$

vollständige Verwendung der Positiv-Implikation:

$p^T[p(X \ast\!\rightarrow Y) > 0/n \ \ast\!\longrightarrow \ p(X \ast\!\rightarrow Y) = n/n] = 1/(2^n - 1)$

Beispiel für n = 2 :

$p^T[p(X \ast\!\rightarrow Y) > 0/2 \ \ast\!\longrightarrow \ p(X \ast\!\rightarrow Y) = 2/2] = 1/(2^2 - 1) = 1/3 = 0{,}33$

• *Semi-analytischer Schluss: von alle auf einige / andere Formalisierung mit* $\wedge$

$p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n \ast\!\longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/n \ ] = (3^n - 2^n)/3^n$

Beispiel für n = 4 :

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 4/4 \ast\!\longrightarrow \ p(X \wedge Y) > 0/4] = (3^4 - 2^4)/3^4 = (81 - 16)/81 = 65/81 = 0{,}8$