BEN- ALEXANDER BOHNKE

INTEGRALE LOGIK UND WELT (modifiziert aus „Integrale Logik“ 2008)

1 Komponenten der Logik

1-1 STUFUNG IN DER LOGIK

Die *herkömmliche* Logik geht meist von einer *2-Stufung* der logischen *Komponenten* aus.
Je nachdem, auf welchen *Wirklichkeitsbereich* sie sich ausrichtet, ergibt dies folgende Stufen:

- *Psyche*
  1. Begriffe (unterteilt in Allgemein-Begriffe und Individual- Begriffe)
  2. Urteile bzw. Gedanken
- *Sprache*
  1. Wörter (unterteilt in Eigennamen und Prädikatoren)
  2. Sätze bzw. Aussagen
- *Realität*
  1. Dinge / Sachen (unterteilt in Individuen und Klassen)
  2. Ereignisse bzw. Sachverhalte

Das Augenmerk der Logik gilt dabei vor allem den jeweils unter 2. genannten Entitäten.
Als Hauptunterschied zwischen 1. und 2. gilt jeweils:
– Die *Entitäten unter 2*. (Urteile, Sätze, Sachverhalte) sind *wahr* oder *falsch* o. ä.
– Für die *Entitäten unter 1.* (Begriffe, Wörter, Dinge) gilt das nicht; man kann also z. B. von einem isolierten Wort nicht sagen, es ist wahr oder falsch.

1-2 OBJEKTE UND RELATIONEN

Auch in der *Integralen Logik* wird eine grundsätzliche *2-Teilung* vorgenommen, in:

1. *Objekte* (genauer: logische Objekte)
   - Individuen
   - Mengen (Verknüpfungen von Individuen)
   - Molekular-Mengen (Verknüpfungen von Mengen)
2. *Relationen* (genauer: logische Relationen zwischen logischen Objekten)
   - Individuen-Relationen (Relationen zwischen Individuen und Mengen)
   - Mengen-Relationen (Relationen zwischen Mengen)
   - Molekular-Relationen (Relationen zwischen anderen Relationen)

Anstelle von *Mengen* kann man auch von *Klassen* ausgehen.
Wie man sieht: Es besteht eine *Parallele* zwischen Objekten und Relationen:

• Individuen	Individuen-Relationen
• Mengen	Mengen-Relationen
• Molekular-Mengen	Molekular-Relationen

Von daher lassen sich *3 Bereiche* der Logik bzw. 3 Logiken unterscheiden:

- *Individuen-Logik* (meistens *Prädikaten-Logik* genannt)
- *Mengen-Logik* (meistens *Klassen-Logik* genannt)
- *Molekular-Logik* (meistens *Aussagen-Logik* genannt)

Die Integral-Logik greift zwar die obigen Unterscheidungen zur Differenzierung auf, primär bezieht sie sich aber auf *generelle Komponenten*, die eben alles sein können. Sie sind *nicht danach spezifiziert*, ob es sich um Individuen, Mengen, Relationen usw. handelt.

Allerdings ist hier auch eine *3er-Unterteilung* möglich:

1. Objekte	z . B. X, Y	konkret: X = Regen, Y = Nässe
2. Relationen	z. B. $\rightarrow$	konkret: wenn – dann
3. Relationsgefüge	z. B. X $\rightarrow$ Y	konkret: wenn Regen, dann Nässe

Es wird hier also genauer unterschieden zwischen den *Relationen* und den *Relationsgefügen* (oder *Relationssystemen*); die Relationsgefüge entsprechen den *Sachverhalten*, *Aussagen* oder *Urteilen*; allerdings kann man zur Vereinfachung auch Relationsgefüge als ‚Relationen' bezeichnen, wenn keine Missverständnisse auftreten können.

Am häufigsten verwende ich im Folgenden aber den Terminus ‚*Struktur*' für ein Relationsgefüge

Die oben dargestellte Theorie, die sich auf *Objekte* und Relationen zwischen ihnen bezieht, kann man *extensional* nennen. Man kann, ja muss sie durch eine zweite *intensionale* Theorie ergänzen, die sich auf *Eigenschaften* (oder *Begriffe*) und Relationen zwischen ihnen bezieht. Auf den Unterschied von Extension und Intension wurde schon kurz eingegangen – und er wird uns noch ausführlich beschäftigen.

1-3 LOGISCHER AUFBAU DER WELT

Ich möchte hier schon einen etwas genaueren Überblick über den *logischen Aufbau der Welt* geben. Im Einzelnen wird in vielen späteren Punkten darauf eingegangen.

Man kann aus logischer Sicht zunächst sagen: Die Welt ist die Gesamtheit (All-Klasse) aller Entitäten. Entitäten sind dabei *Objekte*, *Eigenschaften*, *Relationen* und Relationsgefüge = *Strukturen* (die Quantität wird hier nicht explizit genannt, geht aber implizit in diese Sammlung ein). Zur Übersichtlichkeit lasse ich die *Eigenschaften* erst einmal beiseite.

Welt (alle Entitäten)

Objekte Relationen Strukturen

Nun kann man allerdings analysieren: *Strukturen* bestehen aus Objekten (oder Eigenschaften) und Relationen, insofern ist der Begriff der Struktur *abgeleitet*. Man kann einfacher also auch unterteilen:

Welt

Objekte Relationen

Andererseits kann man eine *umgekehrte* Darstellung wählen; demnach ist das Relationsgefüge, die Struktur (real also der Sachverhalt) der *Ausgangspunkt*. Die Welt ist demnach die Menge aller Strukturen oder aller Sachverhalte.

Welt

Struktur_1 Struktur_2 ... Struktur_n

Eine *einfache* (*atomare*) Struktur besteht immer aus mindestens 2 Objekten. Sie lässt sich folgendermaßen darstellen:

Struktur

Objekt_1 – Relation – Objekt_2

Diese Darstellung entspricht der syntaktischen *Tiefenstruktur*.

Dabei ist zu bedenken, dass es nicht nur einfache Strukturen – als Relationen zwischen Objekten – gibt, sondern auch *komplexe* (*molekulare*) Strukturen, nämlich Relationen zwischen (einfachen) Strukturen.

Molekül-Struktur

Struktur_1 – Relation – Struktur_2

Objekt_1 – Relation – Objekt_2 Objekt_3 – Relation – Objekt_4

Die Wirklichkeit als ganze kann man aber nicht nur als Menge, sondern besser noch als *System* von Molekül-Strukturen (M-Strukturen) verstehen. Dabei ist sowohl eine *Pyramide* vorstellbar, dass alles von einer obersten Mega-Struktur abgeleitet wird, oder aber ein *Netz*.

M-Struktur

M-Struktur — M-Struktur — M-Struktur

M-Struktur

Dieses Welt-Modell ist erst einmal offen auch für eine generelle, *über-logische* Betrachtung. Wie schon bemerkt und später noch genauer aufgezeigt werden soll, berücksichtigt die Logik aber nur *funktionale* Relationen; räumliche, zeitliche, kausale u. a. Relationen werden nicht miterfasst. Somit ist das logische Welt-Modell zwar einerseits allgemeingültig auf jeden Wirklichbereich anwendbar, aber es liefert andererseits keine vollständige Erfassung.

1-4 SCHREIBWEISE

Nachdem oben die möglichen *Ebenen* bestimmt worden, auf welche die Logik Bezug nehmen kann, soll nun die festgelegt werden, wie diese Ebenen in der *Schreibweise* behandelt werden.

Der normale Bezug der Sprache geht auf die *reale* Ebene. Dafür verwende ich keine besonderen Zeichen. Wenn ich etwas als *psychisch* kennzeichnen will, schreibe ich es in # ... #. Wenn ich etwas als *sprachlich* kennzeichnen will, schreibe ich es in ‚ ...’. Wenn ich etwas *anführen* möchte, abgrenzen möchte, als Beispiel o. ä., ohne mich auf eine Ebene festzulegen, schreibe ich „ ...“.

Ich setze den Punkt immer *hinter* das Anführungszeichen, denn es geht hier nur um *Beispielsätze* usw., aber nicht um wörtliche Rede; so wird eine größere Einheitlichkeit erreicht. Wenn ich etwas *hervorheben* möchte, z. B. als Fachbegriff oder als besonders wichtig, verwende ich meistens *Kursiv*-Schrift; in diesem Fall verzichte ich ggf. auf Anführungszeichen.

- Sachverhalt: Peter ist klug.
- Urteil: #Peter ist klug#.
- Satz: ‚Peter ist klug’.
- Unspezifiziert: „Peter ist klug“.

Formalisierungen, logische und mathematische *Formeln*, schreibe ich im Folgenden immer *ohne* Anführungen, auch wenn sie *meta-sprachlich* verwendet werden (bis auf wenige Ausnahmen, wenn der meta-sprachliche Status betont werden soll). Die sprachliche Exaktheit bewerte ich hier niedriger; als wichtiger erachte ich, dass die Formel übersichtlich ist.

1-5 OBJEKT- UND META-SPRACHE

Dieses Thema wurde schon mehrfach kurz angesprochen. Da es aber wichtig ist und zu Missverständnissen Anlass geben kann, führe ich es noch etwas weiter aus. Man unterscheidet zwischen:

• *Objekt-Sprache*: In dieser Sprache wird über *Objekte*, über die Welt gesprochen bzw. geschrieben. Z. B. sage ich aus: Aristoteles war ein genialer Philosoph.

• *Meta-Sprache*: In dieser Sprache wird über die (Objekt-)*Sprache* gesprochen/geschrieben. Z. B. der *Satz* ‚Aristoteles war ein genialer Philosoph’ besteht aus fünf Wörtern (syntaktische Aussage). Oder: ‚Aristoteles war ein genialer Philosoph’ ist wahr (semantische Aussage).

Bei der Objekt-Sprache äußert man sich *in* der Sprache, verwendet sie, bei der Meta-Sprache führt man die Objekt-Sprache an.

Im Grunde ist die Eingrenzung auf Objekt- und Meta-*Sprache* aber zu eng. Ebenso könnte ich unterscheiden: *Objekt-Sachverhalt*: ein Sachverhalt besteht bzw. wird festgestellt, *Meta-Sachverhalt*, es wird eine Feststellung über einen Sachverhalt getroffen (entsprechend *objekt-psychisch* oder *meta-psychisch*). Natürlich erfolgt diese Feststellung in Sprache, womit man wieder auf die Unterscheidung Objekt- und Meta-Sprache verwiesen ist.

Die Unterscheidung zwischen Objekt- und Meta-Sprache ist auch in der Alltagssprache wichtig, weil es sonst zu Missverständnissen kommen kann. Z. B: ‚Aristoteles ist ein genialer Philosoph ist wahr.’ Dies führt zu Verwirrung. Richtig wäre: Der Satz ‚Aristoteles ist ein genialer Philosoph’ ist wahr.

In der Theorie von Mathematik und Logik kann die Nicht-Unterscheidung von Objekt- und Meta-Sprache zu *Antinomien* führen, in der praktischen Verwendung ist dies aber zu vernachlässigen. Aus dem Kontext ist im Grunde immer zu erkennen, ob eine Formel objekt-sprachlich oder meta-sprachlich gemeint ist. Und anders als in der normalen Sprache ergeben sich auch kaum Missverständnisse. Z. B.: $X \rightarrow Y$ ist eine logische Aussage. Oder ganz korrekt: ‚$X \rightarrow Y$’ ist eine logische Aussage. Da der logische Ausdruck durch die Formalisierung ohnehin abgegrenzt ist, muss man ihn optisch nicht notwendig durch *Anführungszeichen* o. ä.

zusätzlich abgrenzen. Andererseits müssten bei korrekter Verwendung der Meta-Sprache sehr häufig Anführungszeichen verwendet werden, was die ohnehin komplizierten Formeln noch unübersichtlicher machte. Da es mir aber wichtig ist, den Text so übersichtlich wie möglich darzustellen, verzichte ich in den Formalisierungen auf den Perfektionismus der strengen Unterscheidung zwischen Objekt- und Meta-Sprache.

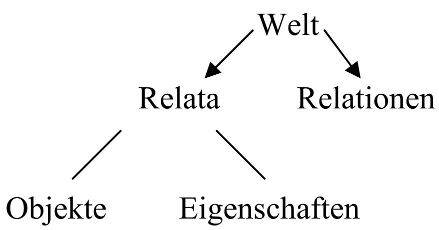
2 Objekte und Verknüpfungen

2-1 LOGISCHE OBJEKTE

‚Objekte' nehme ich als einen übergeordneten *extensionalen* Sprachbegriff oder Terminus. Er lässt sich wie gesagt differenzieren, in *Individuen*, *Mengen/Klassen* oder *Mengen-Verknüpfungen*. Ein Objekt ist eine Ganzheit, eine identifizierbare Entität, traditionell sprach man von ‚Substanz'. Am ehesten denkt man bei Objekten an *konkrete*, körperliche, materielle Objekte, aber es gibt auch *abstrakte* Objekte, die nicht oder nur partiell spezifiziert sind.

Man könnte auch (unräumliche, unzeitliche) *logische Objekte* angeben, aber wesentlich bei der Logik sind die *logischen Relationen*, und die können zwischen allen Objekten bestehen.

Die *Intensionen*, d. h. die *Eigenschaften* oder *Begriffe*, die mit den Individuen und Mengen verbunden sind, fasse ich mit den Objekten im Terminus '*Relata*' zusammen, denn beide haben kaum einen eigenständigen Status, sondern sind primär Bestandteile von *Relation*en bzw. Strukturen. Die *Welt* als ganze lässt sich also zuerst in Relata und Relationen zerlegen.



Diese Bereiche werde ich jetzt näher beschreiben, ohne sprachphilosophische Details.

Generell ist zu bedenken, dass das Ziel jeder Wissenschaft *Vereinheitlichung* bzw. *Einfachheit* ist. D. h. man versucht mit möglichst wenigen Begriffen und möglichst wenigen, möglichst allgemeinen Aussagen auszukommen. Darum bemühe ich mich auch, allerdings muss man zuweilen unnötig komplizierte Ansätze – die dem Einfachheitsgebot zuwiderlaufen – übernehmen, um sich nicht zu sehr von der gängigen Terminologie zu entfernen.

2-2 INDIVIDUEN

Dies ist die unterste Ebene, sie umfasst *individuelle Objekte*, z. B. den Philosophen Sokrates. In der logischen Sprache verwendet man für Individuen *Variablen* wie ‚x', ‚y' oder *Konstanten* wie ‚a' und ‚b'. Ich bevorzuge als Konstanten allerdings ‚x_1' und ‚x_2' usw.

Um auszudrücken „dasjenige Objekt, das die Eigenschaft F hat", verwendet man den *Kennzeichnungs-Operator*: ιx(Fx). Man spricht auch von *‚Jota-Operator'*, weil das griechische Zeichen ι (Jota) verwendet wird.

Man könnte diskutieren, ob es – real – *bestimmte* und *unbestimmte* Objekte gibt; oder ob es sinnvoller ist davon auszugehen, dass nur unsere *Sprachzeichen* semantisch bestimmt oder unbestimmt sind – die Objekte dagegen grundsätzlich bestimmt. Ich werde in 0-2-4 zeigen, dass die Antwort hierauf recht komplex ausfallen muss; vor allem im Bereich der *Quantenphysik* geht man allerdings davon aus, dass Objekte nicht *deterministisch* (vollständig bestimmt), sondern nur *statistisch* (partiell bestimmt) zu fassen sind. Eine weitere Diskussion wäre, inwieweit individuelle Objekte eine einheitliche *Identität* besitzen bzw. diese – über die Zeit – bewahren. Aber in der Logik kann man von diesen Fragen weitgehend abstrahieren.

Der Bezug auf Individuen – individuelle Objekte – ist ein *extensionaler* Zugang. *Intensional* bezieht man sich entsprechend auf *Individual-Eigenschaften* oder *Individual-Begriffe*. Z. B. könnte man von einer *Gesamt-Eigenschaft* „Sokrates" ausgehen – ich schreibe sie ‚E(Sokrates)', also ‚E' für ‚Eigenschaft'; bzw. geht man von einzelnen *individuellen Eigenschaften* aus, wie etwa der Körpergröße von Sokrates. Die Bestimmung einer solchen *Individual-Eigenschaft* bzw. eines solchen *Individual-Begriffs* ist allerdings nicht unproblematisch; dies wird vor allem im Punkt 0-2-4-5 über Definitionen erläutert.

2-3 MENGEN

Mengen sind gedachte *quantitative Zusammenfassungen* von Individuen, die als *Elemente* der Menge gelten. Eine Menge ist z. B. die Zusammenfassung von Sokrates, Platon, Aristoteles.

Man kann *Individuen* auch als Mengen mit nur *einem* Element ansehen. Die Menge „Sokrates" wäre z. B. die Menge, die als *einziges* Element eben Sokrates enthält.

Man benennt Mengen mit ‚M' und ‚N' und schreibt Mengen mit *geschweiften Klammern*.

M = {Sokrates, Platon, Aristoteles} bzw. N = {x, y, z}

Andererseits kann man Mengen auch als bestimmte *Verknüpfungen von Individuen*, nämlich *Vereinigungen* ansehen. Ich verwende dann nicht das unspezifische *Komma*, sondern das *Vereinigungs*-Zeichen ∪. M = {Sokrates ∪ Platon ∪ Aristoteles}

Im Grunde kann man dann auch die geschweiften Klammern weglassen. Das dient alles der Vereinheitlichung, von der oben gesprochen wurde. So ergibt sich z. B.:

M = Sokrates ∪ Platon ∪ Aristoteles

Wie sich später noch zeigen wird, steht das ∪ in Verbindung zu dem Junktor „*oder*", formal ∨ . Das mag irritieren, denn bei einer Vereinigung von Elementen mag man sprachlich doch eher an „*und*" denken, formal ∧. Das „und" ist aber mit dem *Schnitt-Operator* ∩ verbunden, der für die *Schnitt-Menge* steht. Man kann sich nun leicht klarmachen, dass die Schnitt-Menge der Individuen (bzw. der Individual-Mengen) Sokrates, Platon und Aristoteles zu einer *leeren* Menge führen würde, nicht zur Vereinigung.

und	∧	Schnitt-Menge	∩
oder	∨	Vereinigungs-Menge	∪

Allerdings wäre eine alternative Lösung, die Junktoren für die Verknüpfung von Objekten in anderer Weise zu interpretieren als in der Verknüpfung von Relationen (oder eventuell neue Opertoren wie & einzuführen). M = {Sokrates & Platon & Aristoteles} mag besser unseren Intuitionen entsprechen, führte aber zu *mehr verschiedenen* Zeichen, was man wie gesagt vermeiden will.

2-4 KLASSEN

Klassen sind Mengen von *allen* Individuen, denen eine *bestimmte Eigenschaft* zukommt (bzw. ein bestimmter Begriff). Z. B. ist die Klasse der Menschen die Menge aller Objekte, denen die Eigenschaft zukommt, Mensch zu sein.

Diese Bestimmung zeigt die Bedeutung der *Intension*. Man muss zur Definition einer Klasse letztlich auf eine *Eigenschaft* zurückgreifen. Denn sonst geriete man in einen *Zirkel*: „Die Klasse aller Menschen ist die Menge aller Objekte, die Elemente der Klasse Mensch sind".

Zwar kann man Klassen partiell als *Schnitt-Mengen* oder *Vereinigungs-Mengen* anderer Klassen darstellen. So mag man bestimmen: „Die Klasse der Rappen ist die Schnitt-Menge der Klasse der Pferde und der Klasse der schwarzen Objekte“. Führt man diese Definitionen aber weiter, so wird man sich letztendlich doch auf *Eigenschaften* bzw. *Begriffe* beziehen müssen. Immer weiter auf andere Klassen zu verweisen, ist nicht wirklich überzeugend.

Klassen (*extensional*) entsprechen *intensional Klassen-Eigenschaften* oder *allgemeine Eigenschaften*, also z. B. die Eigenschaft „Mensch“ (oder „Menschlichkeit“). In der traditionellen Logik sprach man von „Allgemein-Begriffen“, ich verwende ‚Allgemein-Eigenschaft’ und ‚Allgemein-Begriff’ parallel.

Es stellt sich die Frage: Ist die *Entsprechung* von Klassen und Allgemein-Eigenschaften vollkommen? Man könnte das zunächst bestreiten.

Die Eigenschaft „Mensch“ als Beispiel umfasst nur die Eigenschaften, die für *alle* Menschen gelten (und die das Menschsein bestimmen). Z. B. dürfte die *Haarfarbe* dann keine *Allgemein-Eigenschaft* von Menschen sein, weil die Menschen eben unterschiedliche Haarfarben besitzen; allenfalls könnte man eine *Disjunktion* der *möglichen* Haarfarben eines Menschen (z. B. blond oder braun oder schwarz oder grau oder weiß) als allgemein akzeptieren.

Dagegen wird oft behauptet: Mit der Klasse wird jedes *konkrete* Objekt mit seinen *individuellen* Eigenschaften erfasst, also z. B. jeder Mensch mit seiner Haarfarbe. Letztlich sind individuelle Eigenschaften auch *quantitativ* bestimmt, z. B. müsste bei der Harrfarbe genau angegeben werden, zu wie viel Prozent die Haare grau sind. Somit bestände also ein prinzipieller Unterschied zwischen Klasse und Begriff.

Dagegen könnte man die Auffassung vertreten, dass auch die Klasse nur jeweils die *abstrakten*, *kollektiven* Objekte erfasst, also z. B., dass der Mensch Sokrates nur mit seinen allgemein-menschlichen Eigenschaften (die ihn als Menschen definieren) in die Klasse „Mensch“ eingeht, nicht aber mit seinen individuellen Eigenschaften wie z. B. seiner Haarfarbe. Es wäre dann zu unterscheiden zwischen *abstrakten* Elementen der Klasse – welche die Individuen nur soweit erfasst, wie sie durch die Klasse definiert sind – und den *realen* Individuen. Und in der Tat, ich werde nachher zeigen, warum ich diese Auffassung für richtig halte.

Eine andere Frage ist, welchen Status diese allgemeinen Eigenschaften haben sollen. Gibt es solche allgemeinen Eigenschaften real, wie *platonische Ideen*? Oder muss man sie als rein *sprachliche* Konstrukte bestimmen, geht es um nominal-definitorische Beziehungen? Dies führt zu (sprach)philosophischen Problemen bis hin zum ehrwürdigen *Universalienproblem*. Ich halte eine *realistische* Deutung, für Klassen wie für Begriffe für sinnvoll, kann dies aber nicht im Einzelnen in diesem Text diskutieren.

Klassen ordnen die Wirklichkeit nach *Gleichheit* bzw. *Ähnlichkeit*, indem sie *alle* Individuen mit ähnlichen Eigenschaften zusammenfassen (im Gegensatz zu einer *Menge*, die auch *ungleiche* Objekte willkürlich verbinden kann).

Klassen lassen sich in *Teilklassen* (Teilmengen) zerlegen, bei einer vollständigen Zerlegung bilden die Klassen die Vereinigungs-Menge ihrer Teilklassen. Dabei gilt: Die Elemente einer Teilklasse sind sich ähnlicher als die Elemente der Klasse (Oberklasse). Sei die Oberklasse die Klasse aller Pferde und die Teilklasse umfasse alle Rappen, dann sind die Rappen sich prinzipiell ähnlicher als die Pferde, und zwar in diesem Fall um genau *eine* Eigenschaft, nämlich die schwarze Hautfarbe.

Klassen bezeichnet man mit den Buchstaben ‘F’ und ‘G’ bzw. ‘F_1’, ‘F_2’ usw.
Um sie genau von Begriffen abzugrenzen, kann man ggf. schreiben: ‘K(F)’, ‘K(G)’ usw.
Klassen lassen sich vor allem auf zwei Arten *formalisieren*: *Aufzählung* und *Beschreibung*.

• *Aufzählung*

$$F = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$$

Ich verwende also die oben eingeführte Formalisierung.

Die herkömmlich Formalisierung wäre: $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
Beide Formalisierungen gelten nur bei *endlichen* Klassen. Bei *unendlichen* Klassen gilt:

$F = x_1 \cup x_2 \cup \dots$

Ein Problem ist: $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind unspezifisch. Man kann ihnen nicht ansehen, ob es sich um die Elemente der Klasse F oder z. B. der Klasse G handelt. Um zu zeigen, dass es sich um Elemente von F handelt, kann man formulieren (vgl. 1-3-1-4):

x_1(x_1 hat die Eigenschaft F) $\cup \dots \cup$ x_n(x_n hat die Eigenschaft F)
formal: $F = x_1(Fx_1) \cup x_2(Fx_2) \cup \dots \cup x_n(Fx_n)$
Alternative: $F = x_1(x_1 \in F) \cup x_2(x_2 \in F) \cup \dots \cup x_n(x_n \in F)$
(dies ist aber zirkel-verdächtig)

Ggf. verwendet man besser *eckige* Klammern [ ], da die *runden* Klammern meistens im Sinne einer Aussage verstanden werden. Man könnte also z. B. unterscheiden:

$x_1(Fx_1)$: für x_1 gilt: Fx_1 (*Aussage* über ein Individuum, kurz auch Fx_1)
$x_1[Fx_1]$: x_1, für das gilt: Fx_1 (*Anführung* des Individuums)

Den Jota-Operator $\iota x(Fx)$ kann man hier nicht verwenden, denn er bezieht sich nur auf die Individuen-*Variable* ‚x', nicht auf eine Individuen-*Konstante* wie ‚x_1'.

• *Beschreibung*
Die herkömmliche Schreibweise ist: $F = \{x / Fx\}$
Lies: „Die Klasse F ist die Menge aller x, für die gilt: x hat die Eigenschaft F".

Normalerweise habe ich für *Eigenschaft* immer das ‚E' geschrieben, die Eigenschaft der Klasse F schreibt man also ‚E(F)' (sprich ‚E von F'). Daher müsste die Formalisierung eigentlich lauten: $F = \{x / E(F)x\}$. Durch die Syntax ist aber bei $F = \{x / Fx\}$ klar, dass die Eigenschaft F gemeint ist, ohne dass man ‚E' nennt. Denn wäre die Klasse F gemeint, würde man schreiben $F = \{x / x \in F\}$, was wiederum ein Zirkel wäre.

Alternativ zur Mengen-Darstellung kann man den *Klassen-Operator* nutzen. Um auszudrücken „die Klasse aller x, für die gilt, x hat die Eigenschaft F", verwendet man den *Klassen-Operator* oder *Lambda-Operator*, benannt nach dem griechischen Zeichen *Lambda* λ: $\lambda x(Fx)$.

2-5 VERKNÜPFUNGEN

Logische *Verknüpfungen* müssen genauer beschrieben werden. Verknüpfungen in der Logik sind keine räumlichen oder zeitlichen Synthesen, sondern man muss sie rein *quantitativ* verstehen. Am besten bieten sich hier *mengentheoretische* Begriffe an. Allerdings werden zur Definition auch logische Junktoren, die sich auf *Relationen* beziehen, verwendet.

Im weiteren Sinn kann man Verknüpfungen noch zu den *Objekten* rechnen. Ich spreche hier von *Mengen*-Verknüpfungen, man kann aber genauso von *Klassen*-Verknüpfungen ausgehen.

Herkömmlicherweise werden *Verknüpfungen* nur auf Mengen bezogen. Dabei ergibt sich aus der Verknüpfung von zwei (oder mehr) Mengen eine neue Menge. Wie beschrieben, kann man aber auch *Individuen* zu einer Menge verknüpfen. Eine *komplexe* Menge, die sich aus der Verknüpfung von anderen Mengen ergibt, nenne ich *Molekular-Menge* (oder *Molekül-Menge*).

Entsprechend zur oben genannten (ontologischen) Neutralität der Integral-Logik, ist es letztendlich irrelevant, ob man die Verknüpfung auf Individuen oder Mengen bezieht, erst recht, ob man von Mengen sprachlicher, psychischer oder realer Objekte ausgeht.

Verknüpfungen von Mengen sind genau zu unterscheiden von *Relationen* zwischen Mengen: „M ist *Teilmenge* von N" ist z. B. eine Relation, sprachlich eine *Aussage*, die *wahr* oder *falsch* sein kann. Dagegen sind Verknüpfungen von Mengen ebenfalls Mengen und damit nicht wahr oder falsch.

Man kann Verknüpfungen in zweierlei Weise auffassen:
1) *statisch*, als *Zustände*:
 die Menge M *ist* mit der Menge N verknüpft
2) *dynamisch* bzw. handlungstheoretisch, als *Operationen*:
 die Menge M *wird* mit der Menge N verknüpft
Ich ziehe den Ausdruck ‚*Verknüpfung'* aber vor, der für beide Interpretationen offen ist.

Anhand der Vereinigung von Mengen (vgl. unten) sei das genauer erklärt:

$$M_1 \cup M_2 = N$$

$M_1 \cup M_2$	Verknüpfung, hier Vereinigung bzw. Vereinigungs-Menge
$\cup$	Verknüpfungs-Operation bzw. Operator
N	Resultierende Menge: Molekular-Menge
M_1, M_2	Ausgangs-Mengen

Bei 2 Mengen M und N sind $4^2 = 16$ *Verknüpfungen* möglich. (Auf *geordnete Mengen* gehe ich hier nicht ein, vgl. dazu 0-1-5-3 Syntax.)
Ich gebe aber nur die wichtigsten Verknüpfungen zwischen 2 Mengen M und N an:

- Vereinigungs-Menge $M \cup N$
- Schnitt-Menge $M \cap N$
- Differenz-Menge $M \setminus N$
- Ergänzungs-Menge M'

• *Vereinigungs-Menge* $M \cup N$ (Vereinigungs-Verknüpfung)
Die wird herkömmlich definiert als eine Verknüpfung von 2 Mengen M und N, wobei alle Elemente erfasst werden, die in M *oder* N enthalten sind (inklusives oder):

$$M \cup N = \{x \,/\, x \in M \ \vee \ x \in N\}$$

Ich möchte die Vereinigungs-Menge aber wie gesagt allgemeiner verstehen. Auch Individuen x, y, z lassen sich vereinigen, und zwar enthält man so die Menge (bzw. Vereinigungsmenge) dieser Individuen.

$$x \cup y \cup z = \{x, y, z\}$$

• *Schnitt-Menge* $M \cap N$ (Schnitt-Verknüpfung)
Sie spielt neben der Vereinigungs-Menge die wichtigste Rolle. Es ist die Menge aller x, die in M *und* N enthalten sind.

$$M \cap N = \{x \,/\, x \in M \ \wedge \ x \in N\}$$

Die Schnitt-Menge von Individuen ist die leere Menge.

• *Differenz-Menge* $M \setminus N$ (Rest-Menge)
Es ist die Menge aller x, die zu M, aber nicht zu N gehören

$$M \setminus N = \{x \,/\, x \in M \ \wedge \ x \notin N\}$$

• *Ergänzungs-Menge* M' (Komplement-Menge)
Zur Ergänzungs-Menge M' gehören alle Elemente, die zu N, aber nicht zu M gehören. Somit ist die Ergänzungs-Menge das Gegenstück zur Differenz-Menge.

$$M' = N \setminus M = \{x \,/\, x \in N \ \wedge \ x \notin M\}$$

Oft wird als zusätzliche Bedingung angegeben: $M \subseteq N$

Mengen-Verknüpfungen können prinzipiell unabhängig davon vollzogen werden, in welcher *Relation* die Mengen zueinander stehen; Mengen-Relationen sind z. B. *Teilmengen*-Relation oder *Identität* (dies wird noch ausführlich erläutert). Nur ergeben sich unterschiedliche Ergebnisse der Mengen-Verknüpfungen in Abhängigkeit von der Relation. Wenn M und N identisch sind, dann ist z. B. die Schnitt-Menge $M \cap N$ ihrerseits identisch mit M bzw. N. Wenn dagegen M und N überhaupt keine gemeinsamen Elemente haben, dann ist ihre Schnitt-Menge die *leere Menge*.

3 Objekte und Eigenschaften

Ich habe oben über Objekte und Eigenschaften geschrieben, dabei wurde deutlich: *Objekten* entsprechen immer *Eigenschaften* (bzw. Begriffe).

Individuen entsprechen *Individual-Eigenschaften.*

Klassen entsprechen *Klassen-Eigenschaften* oder Allgemein-Eigenschaften.

Ein Objekt ist immer eine *Ganzheit*, das gilt für Individuen wie für Klassen. Eine Eigenschaft, selbst eine komplexe Eigenschaft, kann man dagegen normalerweise als etwas *Isoliertes* sehen, das zwar begrifflich oder logisch eigenständig zu fassen ist, real aber nicht alleine auftritt.

Das Verhältnis von *Objekten* und *Eigenschaften* wurde im bisherigen Text noch nicht im Einzelnen geklärt, es ist sehr kompliziert, und man findet viele verschiedene Theorien darüber. Dieses Verhältnis ist gerade im vorliegenden Buch ein wichtiges Thema, auch hier weil *Extension* und *Intension* über den Unterschied von Objekten und Eigenschaften definiert werden. Allerdings überschreitet das Thema die Grenzen der Logik in Richtung Sprachphilosophie, deswegen gehe ich ausführlich erst in einem geplanten Buch über *Integrale Philosophie* darauf ein. Die folgenden Ausführungen sind primär für Spezialisten.

0-2-3-1 THEORIEN

Nachfolgende seien verschiedene Theorien über Objekte bzw. Eigenschaften kurz zusammengefasst. Es wird jeweils vom Objekt ausgegangen: Was ist ein Objekt? Dabei soll zur Vereinfachung nicht im Einzelnen differenziert werden zwischen Individuen und Klassen (obwohl das für eine präzise Formalisierung erforderlich wäre).

Es stellen sich die Fragen wie: Sind Objekt und Eigenschaft voneinander *unabhängig* oder lassen sie sich nicht voneinander trennen? Ist ein Objekt auf Eigenschaften *reduzierbar* oder sind Eigenschaften auf ein Objekt reduzierbar? Die verschiedenen Theorien geben unterschiedliche Antworten hierauf. Im Wesentlichen kann man drei Theorien unterscheiden:

1) Ein Objekt ist *nur* eine Kombination von *Eigenschaften*
2) Ein Objekt ist ein *Träger mit Eigenschaften*
3) Ein Objekt ist *nur* ein *Träger*

3-2 EIN OBJEKT IST *NUR* EINE KOMBINATION VON *EIGENSCHAFTEN*

Konkret kann das vor allem bedeuten: Ein Objekt ist eine

– *Vereinigungs-Menge* von Eigenschaften: $E(F) \cup E(G)$, kurz $E(F \cup G)$ bzw. $E(F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n)$. ‚E' steht wie schon eingeführt für ‚Eigenschaft'.
– *Schnitt-Menge* von Eigenschaften: $E(F \cap G)$ bzw. $E(F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n)$

Hier ist das Objekt auf seine Eigenschaften reduzierbar, somit ist ‚Objekt' kein eigenständiger Begriff. Man muss keinen gesonderten *Träger* der Eigenschaft, keinen *Besitzer* der Eigenschaft annehmen. Dies passt zu Theorien, dass es z. B. keine (fortdauernde) Identität von Dingen gibt, auch kein konstantes *Ich* des Menschen.

Ein einfaches Beispiel: Rappe = E(Pferd) $\cup$ E(schwarz). Formal: $F = E(G) \cup E(H)$
Der Rappe als *Objekt* wird vollständig auf die zwei *Eigenschaften* „Pferd" und „schwarz" reduziert. Man könnte auch ‚Pferd' adjektivisch als ‚pferdig' schreiben, um den Eigenschafts-charakter hervorzuheben, aber das betrifft nur die syntaktische *Oberflächenstruktur*. Allerdings ließe sich auch „Rappe" selbst schon als Eigenschaft und nicht als Objekt verstehen.

Eigenschaften werden hier – wie Objekte – als *Mengen* aufgefasst, als Mengen von anderen Eigenschaften oder Merkmalen (bzw. Mengen-Verknüpfungen), deshalb können die Mengen-operatoren verwendet werden, wie der Schnitt-Operator $\cap$ oder der Vereinigungs-Operator $\cup$.

Diese Theorie hat zunächst den Vorteil der Einfachheit und Eleganz, aber bei komplizierten Fällen ergeben sich schnell Schwierigkeiten, und es ist *ontologisch* auch problematisch, vollständig auf Objekte oder Träger zu verzichten.

Die *umgekehrte* Theorie, dass Eigenschaften auf Objekte reduziert werden, trägt gar nicht. Zwar kann man z. B. umformulieren: ‚Die Eigenschaft „Mensch" zu besitzen, heißt, Element der Klasse der Menschen zu sein'. Hier wird festgelegt: Eigenschaft = *Klassenzugehörigkeit*. Und so kann man die Zusprechung von Klassenzugehörigkeiten immer weiter fortsetzen, aber letztlich bleibt dies ohne Erklärungswert, wenn man sich nicht irgendwann auf Eigenschaften bezieht (wie schon oben angemerkt). Erst recht bei *individuellen* Eigenschaften ist es problematisch, wenn man z. B. die komplexe Individual-Eigenschaft „Sokrates" erklärt als Zugehörigkeit zur Klasse Sokrates; denn es gibt eben gerade nur *ein* Individuum Sokrates.

3-3 EIN OBJEKT IST EIN *TRÄGER MIT EIGENSCHAFTEN*

Hier gibt es im Einzelnen folgende Möglichkeiten: Ein Objekt ist

– ein *formaler Träger* (ohne inhärente Eigenschaften)
Diesem formalen Träger kommen aber *notwendig* bestimmte Eigenschaften zu,
also: Objekt = eigenschaftsloser Träger + Eigenschaften.
Z. B.: Rappe = Träger, der die Eigenschaften „Pferd" und „schwarz" besitzt.
Halb-formal: Rappe = x[Pferd x $\wedge$ schwarz x] Formal: $F = x[Gx \wedge Hx]$
Lies z. B.: 'Ein Rappe ist ein *x, für das gilt*: x ist Pferd und x ist schwarz'.

Anstatt von einem formalen Träger könnte man auch von einem formalen *Prinzip*, etwa einem Ganzheitsprinzip ausgehen. Z. B.: Rappe = ein Prinzip, das „Pferd" und „Rappe" zu einer Ganzheit, einer Substanz verbindet. (Hier kann man auf das ‚E' verzichten.)

– ein *inhaltlicher Träger* (mit inhärenten Eigenschaften)
Diesem inhaltlichen Träger kommen *notwendig* weitere Eigenschaften zu,
also: Objekt = inhaltlicher Träger + Eigenschaften
Z. B.: Rappe = Pferd (inhaltlicher Träger), das die Eigenschaft „schwarz" besitzt.
Halb-formal: Rappe = Pferd[Schwarz (Pferd)] Formal: $F = G[H(G)]$
Der Träger „Pferd" besitzt hier bereits inhärente Eigenschaften, es müssen aber notwendig noch andere Eigenschaften hinzukommen (hier schwarz"), damit das Objekt („Rappe") bestimmt ist. (Auch hier kann man auf das ‚E' verzichten, weil die Syntax eindeutig ist.)

Allerdings kann man „Pferd" auch bereits als *Objekt* betrachten, nur ist Rappe eben ein *komplexeres* Objekt als Pferd. Wenn man von einem *inhaltlichen* Träger ausgeht, diesen aber auf immer *allgemeinere* Träger zurückführt: Pferd – Säugetier – Tier – Lebewesen – Entität usw., gelangt am offensichtlich zum Schluss doch zu einem *formalen* Träger.

Bei diesen Theorien sind *Objekt* und *Eigenschaft* nicht wirklich trennbar. Es gibt gewissermaßen *gebundene* Eigenschaften, die *inhärenter* Bestandteil eines Objektes sind, und *ungebundene*, freie Eigenschaften. Das Objekt besteht aus einem Träger und gebundenen (essentiellen) Eigenschaften. Zwar lassen sich Träger und Eigenschaften unterscheiden und somit logisch trennen, aber real treten sie nur zusammen auf.

Die natürliche Sprache favorisiert aus der Gruppe 2) die Theorie des *inhaltlich* bestimmten Trägers. Z. B. ist das *Individuum* Sokrates ein „Träger" (z. B. ein Mann), dem bestimmte Eigenschaften (wie Mensch) *inhärent* sind, dem aber weitere zugesprochen werden müssen (z. B. Philosoph). Auch *Klassen* wie z. B. die Klasse der Menschen sind schon durch inhärente Eigenschaften definiert. Grundsätzlich ist der Vorteil solcher Theorien, in ihren verschiedenen Varianten, dass sie am meisten unseren Intuitionen entsprechen.

Der Nachteil dieser Theorie ist, dass hier der *Unterschied* zwischen Objekten und Eigenschaften *relativiert* ist. Objekte beinhalten notwendig bereits Eigenschaften. Man könnte sich zwar helfen, indem man von Eigenschaften ausgeht und die dann unterteilt in *objektgebundene* und *freie* Eigenschaften; aber diese Umgehung der Objekte überzeugt nicht wirklich.

3-4 EIN OBJEKT IST *NUR* EIN *TRÄGER*

Hier gibt es im Einzelnen insbesondere zwei Möglichkeiten: Ein Objekt ist

– nur ein formaler Träger

– nur ein *formales Prinzip*

Das Prinzip ist zuvorderst eine Ganzheit, der erst sekundär Eigenschaften zukommen: etwas Beharrendes, Bestehendes, ein Seins-, Identitäts- oder Objekt-Prinzip, eventuell ein (selbst)organisierendes Prinzip, das Eigenschaften organisiert und integriert.

Das Objekt ist somit rein *formal*, nur *Träger* oder nur *Prinzip*. So gesehen wären alle Objekte *gleich*, die Unterschiede und die Charakterisierung erfolgte erst durch Eigenschaften (die aber nicht primär zum Objekt dazu gehören).

Die formale Logik beruht auf dieser Theorie, sie geht von einem *formalen* Träger aus, insbesondere einem formalen *Individuum* x, dem die Objekt-Variable ‚x' entspricht. Normalerweise geht man z. B. bei einer Klasse von völlig *unbestimmten Objekten* bzw. Trägern x aus, denen dann erst bestimmte Eigenschaften zugesprochen werden. Während man z. B. die Klasse der Menschen in der *natürlichen* Sprache als „alle Menschen" erfasst, wird sie in der Logik als „alle x, welche die Eigenschaft Mensch besitzen" bestimmt. Bei *Individuen* wie *a* oder *b* ist die Logik nicht so konsequent, eigentlich müsste sie z. B. Sokrates entsprechend fassen als „a, das die Eigenschaft Sokrates besitzt", was aber üblicherweise nicht geschieht. Ich analysiere das genauer im Punkt 0-2-4 über Variablen und Konstanten.

Jedenfalls sind bei dieser Theorie Objekt und Eigenschaft *exakt getrennt*. Denn Objekte beinhalten keine Eigenschaften und Eigenschaften lassen sich unabhängig von einem Träger analysieren. Dies bringt formal Vorteile, ist aber ontologisch schwer haltbar.

3-5 DISKUSSION

Wie löst man dieses Dilemma, dass man einerseits Objekte und Eigenschaften möglichst trenne will (wie in der formalen Logik), andererseits rein formale Objekte ontologisch wenig Sinn machen?

Eine elegante Möglichkeit wäre zu unterscheiden:
extensionale Objekte (reine Objekte), *intensionale Objekte* (Eigenschaften) und *gemischt extensional-intensionale Objekte* (Objekte mit Eigenschaften).

Das wäre auch deshalb attraktiv, weil später entsprechend zwischen extensionalen, intensionalen und gemischt extensional-intensionalen Sachverhalten bzw. Sätzen unterschieden wird. Aber es verkompliziert die ohnehin schwierige Thematik bzw. die Sprache zusätzlich, wenn man z. B. statt von ‚Eigenschaften' nun von ‚intensionalen Objekten' spricht.

Die beste, wenn auch nicht vollständig überzeugende Lösung ist, zu unterscheiden zwischen:

- *inhaltlichen* (materialen) Objekten
  wie z. B. Sokrates oder der Klasse der Menschen
- *formalen* (inhaltslosen) Objekten bzw. Trägern
  wie x, y (je nach Logik-Modell auch F, G usw.)

Ein *formales* Objekt x in der Logik (entsprechend der Individuums-Variable ,x') besitzt keine Eigenschaften. Aber ein *inhaltliches* Objekt, entsprechend einem Wort in der Sprache, beinhaltet Eigenschaften, es besteht eben aus einem formalen Objekt (Träger) und Eigenschaften.

inhaltliches Objekt = *formales* Objekt (x) + Eigenschaften

Abschließend hierzu sei gefragt, ob Objekte oder Eigenschaften *Vorrang* besitzen. Die Antwort hängt natürlich auch davon ab, welche der obigen Theorien man vertritt. Es spricht aber doch einiges dafür, die Eigenschaften als höher einzustufen; denn wenn man Objekte nicht rein formal fassen will, benötigt man Eigenschaften, um sie zu bestimmen.

Zwar könnte man auch einwenden, dass es *isolierte* Eigenschaften gar nicht gibt, dass Eigenschaften immer nur in Verbindung mit einem Objekt auftreten und somit die Objekte wichtiger sind. Aber diese Argumentation würde von einer anderen Ebene aus geführt, z. B. einer physikalischen Theorie der Welt. *Physikalisch* betrachtet könnte man sicher bestreiten, dass sich Objekt und Eigenschaft überhaupt trennen lassen, *logisch* ist das aber möglich und legitim.

Im Buch „Integrale Logik", beim Thema Extension und Intension, wird noch auf weitere Differenzierungen von Objekten und Eigenschaften eingegangen, z. B. *konkrete* und *abstrakte* Objekte oder *notwendige* und *kontingente* Eigenschaften.

4 Konstanten und Variablen

4-1 EINFÜHRUNG

Der Punkt Konstanten versus Variablen betrifft primär die *Sprache* bzw. die *Meta-Sprache*. Nachdem wir uns zuletzt vor allem mit der *realen* Ebene der *Objekte* bzw. der *Objekt-Sprache* beschäftigt haben, geht es jetzt also wieder primär um die Zeichen selbst.

Zwar kann man zunächst auch definieren: *Konstanten* stehen für *bestimmte* Objekte, *Variablen* stehen für *unbestimmte* Objekte. Doch wäre in Frage zu stellen, ob es real überhaupt unbestimmte Entitäten gibt. Das Thema, inwieweit die Objekte (unserer Erkenntnis) bestimmt sind, wird uns in 0-3 noch beschäftigen. Aber unabhängig davon bleibt festzuhalten: Um sich eine anspruchsvolle ontologische Diskussion über die Bestimmtheit und Bestimmtheit der Welt zu ersparen (die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde), formuliert man lieber:

Konstanten stehen für *bestimmte*, *gleichbleibende Interpretationen*,
Variablen stehen für *unbestimmte*, *wechselnde Interpretationen*.

Was *Variablen* und *Konstanten* betrifft, so herrscht in der Logik leider große Unklarheit, ja ein Durcheinander. Das betrifft zum einen die *Notation*, d. h. welche Zeichen man für Konstanten oder Variablen verwendet. Schwerwiegender ist aber, dass auch die *Theorie* der Konstanten und Variablen große Mängel aufweist.

Daher muss ich mich an verschiedenen Stellen im Text mit dieser Thematik auseinandersetzen. Ich habe mich in 0-1-5 Sprache (in den Unterpunkten „Alphabet" und „Formalisierung") schon kurz damit beschäftigt und werde mich auch an späterer Stelle noch darauf eingehen.

Es wurde schon festgestellt, dass es bei den *logischen Zeichen* wie $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ $\leftarrow$ $\wedge$ $\vee$ nur Konstanten gibt. Das Problem Konstanten versus Variablen betrifft vor allem die Zeichen, die sich auf Individuen, Klassen und Sachverhalte (bzw. deren Intensionen) beziehen, man nennt sie *deskriptive Zeichen*.

Man könnte durchaus die These vertreten, dass die Logik *gar keine deskriptiven Konstanten* benötigt, weil sie eben grundsätzlich von Bedeutung abstrahiert, weil jedes Zeichen sich prinzipiell auf wechselnde bzw. verschiedene Entitäten anwenden lässt. Da die Unterscheidung zwischen Konstanten und Variablen aber etabliert ist, will ich sie auch berücksichtigen. Ich werde zunächst *Individuen-Konstanten* besprechen, allerdings muss man dabei auch schon auf Individuen-Variablen Bezug nehmen (Konstanten und Variablen sind ohnehin so miteinander verbunden, dass man beim Beginn mit Variablen das entsprechende Problem hätte).

4-2 INDIVIDUEN-KONSTANTEN

Individuen-Konstanten sind Zeichen, die ein *bestimmtes* individuelles Objekt bezeichnen bzw. benennen; anders gesagt, Individuen-Konstanten bezeichnen *stets dasselbe* Individuum.

1) *Formale, logische Sprache*

Wenden wir uns zunächst der formalen Sprache der Logik zu: Normalerweise werden in der *Logik* ‚a', ‚b' usw. bzw. ‚a_1' und ‚a_2' usw. als *Individuen-Konstanten* verwendet. Ich habe aber schon darauf hingewiesen, dass ‚a' natürlich keineswegs so eine Individuen-Konstante ist wie ein *Eigennamen* in der normalen Sprache. Nehmen wir als Beispielsatz: ‚a ist Philosoph'. Um zu wissen, ob der Satz wahr ist, muss ich ‚a' *interpretieren*, muss ‚a' eine konkrete Bedeutung zuweisen. Dies ist aber eben genau die Definition einer *Variable*, dass diese erst durch eine Interpretation genau bestimmt wird (vgl. später). Man könnte ‚a' also allenfalls als *Unbekannte* auffassen, es steht zwar für ein bestimmtes Individuum, aber man weiß nicht, für welches. Ob sich allerdings wirklich ein Unterschied zwischen *Variablen* und *Unbekannten* aufrechterhalten lässt, würde eine weitere komplizierte Analyse erfordern.

Ich benötige in meinem Buch die Buchstaben ‚a', ‚b' usw. für Zahlengrößen. Um Missverständnisse zu vermeiden, verwende ich stattdessen das Zeichen ‚x' (bzw. ‚y') das eigentlich als Individuen-*Variable* gilt. Durch einen *Index* wird es aber zur *Konstante* transformiert. D. h. als *Individuen-Konstante* wähle ich ‚x_1' usw., ‚x_i' oder ‚x_n'.

Die Frage, welchen *Index* man verwendet, ist aber alles andere als simpel.
Vergleichen wir dazu folgende Sätze:

- ‚Karl Popper ist Philosoph'

Bei diesem Satz aus der normalen Sprache ist der *Eigenname* ‚Karl Popper' die Individuen-Konstante, durch den ein Individuum eindeutig identifiziert und bestimmt ist (auch wenn diese Bestimmung nicht eine rein sprachliche ist).

- ‚x_1 ist Philosoph'

‚x_1' ist keine so eindeutige Bestimmung wie ‚Karl Popper', auch hier muss eine *Interpretation* erfolgen, z. B. x_1 = Karl Popper. Dennoch ist ‚x_1' gewissermaßen „konstanten-nah". Es wird ein *einzelnes* und *bestimmtes* Objekt x_1 bezeichnet, auch wenn dies zunächst *unbekannt* ist. Denn es gibt keine Sprach- bzw. Wissensgemeinschaft, in der ‚x_1' eine konstante Bedeutung besitzt. Eindeutig, aber nicht formal wäre nur: ‚x_1[x_1 ist Karl Popper] ist Philosoph'.

- ‚x_i ist Philosoph'

Was steht für x_i? Man findet 2 Deutungen:

Erstens, z. B.: $x_i = x_1, x_2, x_3$. Hier wird x_i nicht allgemein angegeben, sondern jeweils auf den *speziellen* Fall bezogen, es könnte in einem anderen Fall bis x_5 gehen oder bis x_{10} usw., aber in jedem Fall gilt: $i < n$; i ist also limitiert und somit *endlich*.

Zweitens, $x_i = x_1, x_2, \dots, x_n$. Hier kann also jede *natürlich Zahl* n für i eingesetzt werden. Ist diese die Folge dann noch *endlich*? Das ist nicht trivial, einerseits wird zwar ein *letztes Glied* x_n genannt, andererseits gilt: n = 1, 2, 3, ... (meint, die Menge der natürlichen Zahlen ist *unendlich*). Normalerweise versteht man aber $x_1, x_2, \dots, x_n$ als endliche Folge, letztlich ist das eine Definitionsfrage.

Nun kann eine Aufzählung wie $x_i = x_1, x_2, x_3$ hier nur *disjunktiv* gemeint sein, d. h. durch ein „*oder*“ verknüpft, z. B.: ‚x_i = Sokrates oder x_i = Platon oder x_i = Aristoteles’. Bezogen auf den Beispiel-Satz, z. B.: ’x_i ist Philosoph $\leftrightarrow$ Sokrates ist Philosoph oder Platon ist Philosoph oder Aristoteles ist Philosoph’.

Formal schreibt man: ‚$Fx_i \leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee Fx_3$’. In jedem Fall bezieht sich ‚x_i’ also auf verschiedene Möglichkeiten, von denen aber nur *eine gemeint* ist. Deutlicher würde der Bezug auf *ein* Individuum, wenn man die Kontravalenz >< wählte: ‚$Fx_i \leftrightarrow Fx_1 >< Fx_2 >< Fx_3$’. Denn hier ist eindeutig, dann nur eins von den genannten x die Eigenschaft F besitzt. Aber um die Darstellung nicht noch komplizierter zu machen, bleibe ich bei der Disjunktion $\vee$.

Kann man nun (nach dieser Definition) einen Satz wie ‚Sokrates ist Philosoph’ mit ‚x_i ist Philosoph’ wiedergeben? ‚Sokrates ist Philosoph’ schließt nicht aus, dass auch andere Personen Philosophen sind. Nun ist ‚$Fx_i \leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee Fx_3$’ ja auch wahr, wenn z. B. nur ‚Fx_2’ wahr ist. ‚Fx_2’ könnte aber stehen für ‚Platon ist Philosoph’, es ist daher nicht gesichert, dass gilt: ‚Sokrates ist Philosoph’. Somit scheint die Verwendung von ‚x_i’ als Individuen-Konstante nur bedingt geeignet, sie entspricht jedenfalls nicht dem Eigennamen bzw. dem Individual-Satz in der normalen Sprache.

- ‚x_n ist Philosoph’

n = 1, 2, 3, ... somit: $x_n = x_1, x_2, x_3, ...$ Hier wird *kein Endglied* genannt, insofern bezieht sich $x_n = x_1, x_2, x_3, ...$ auf eine *unendliche* Reihe. Allerdings ist es wiederum *disjunktiv* zu verstehen: $Fx_n = Fx_1 \vee Fx_2 \vee Fx_3 \vee ...$ Nicht konjunktiv als: $Fx_n = Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge Fx_3 \wedge ...$ Dennoch ist x_n wenig geeignet als Darstellung einer Individuen-Konstante.

Fazit: Echte Individuen-Konstanten gibt es gar nicht in der Logik, es sei denn man nimmt eben eine Konstante wie ‚$x_{sokrates}$’, aber dann könnte man im Grunde direkt die Konstanten der *normalen Sprache* verwenden. Am nächsten den Konstanten sind Ausdrücke mit *singulärem Zahl-Index* wie ‚x_1’. Wenn man eine allgemeinere Form der Konstante will, notiert man am besten ‚x_i’ (nur ist eben eine allgemeine Form einer Konstante letztlich eine Variable). Wie sich aber später noch zeigen wird, ist es für die logischen Schlüsse ohne Belang, welche Notation man wählt; alle folgenden Formulierungen sind gleichermaßen gültig:

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx_1 \Rightarrow Gx_1$$
$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx_i \Rightarrow Gx_i$$
$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx_n \Rightarrow Gx_n$$

2) *Normale Sprache*

Betrachten wir nun zum Vergleich die Individuen-Konstanten in der *normalen Sprache*. Hier scheint zunächst klar: Eine Individuen-Konstante ist ein *Eigenname*. Die Verhältnisse sind bei genauer Analyse aber noch komplizierter als in der Logik. Nehmen wir einen *Vornamen* wie ‚Hans’. Er ist sicher angelegt als Konstante, faktisch heißen aber Tausende Menschen ‚Hans’ – so gesehen müsste man ‚Hans’ als Individuen-*Variable* führen.

Dagegen kann man einen *vollständigen Namen*, mit Vor- und Nachnamen, wie ‚Karl Popper’ als eine echte Konstante, mir klarer Extension ansehen; natürlich können ggf. auch mehrere Personen den gleichen Namen, z. B. ‚Karl Popper’ haben, dem könnte man durch Nennung des vollständigen Namens ‚Sir Karl Raimund Popper’ wahrscheinlich entgehen, jedenfalls fungiert der vollständige Name nicht als Variable, selbst wenn mehrere so heißen.

Allerdings gibt es folgende Problematik der Bedeutung von *Eigennamen*: sie sind in der normalen Sprache (normalerweise) nicht *sprachlich* definiert. Man findet in einem reinen *Wörterbuch* nicht die Bedeutung von ‚Karl Popper’, sondern nur im *Lexikon*, im Sinne einer „Sacherklärung“. Dies liegt daran, dass eine solche Namengebung im Wesentlichen ein *persönlicher*, *individueller* Akt ist (die Eltern geben ihrem Kind einen Namen) und keine Bedeutungszuweisung in Regie der *Sprachgemeinschaft*. So ist z. B. die Bedeutung des Namens ‚Hans Georg Friedrich Michels’ bei seiner Familie und seinen Freunden bekannt, nicht aber allgemein. Dennoch sind in einer Gesellschaft bestimmte Eigennamen von *Prominenten* in ihrer Extension bekannt, wobei es natürlich große Unterschiede in der Bekanntheit gibt. Eigennamen, deren Extension allgemein bekannt sind, sind außerdem z. B. Namen von Flüssen wie ‚Rhein', ‚Mosel', ‚Lahn' usw. (vgl. auch Punkt 0-3-1-4 zum Thema Definition).

Bei Namen von *unbekannten* Menschen, z. B. ‚Hans Günther Friedrich Michels', weiß also der normale Sprecher der deutschen Sprache nicht, wer damit gemeint ist. Auch hier benötigt man zu dem Namen eine Erklärung, Beschreibung o. ä., was bzw. wer die *Extension* dieses Namens ist; und grundsätzlich muss bei allen Sprachzeichen *zunächst* die Bedeutung, die Intension festgelegt werden. Man könnte daher einwenden: Hier liegen dieselben Verhältnisse vor wie bei der Individuen-Konstante ‚a' (o. ä.) in der formal-logischen Sprache. Der wesentliche Unterschied ist aber: Mit dem Namen ‚Hans Günther Friedrich Michels' wird stets *dasselbe* Individuum bezeichnet, die Bedeutung ist *konstant*, dagegen wird in der Logik durch eine sogenannte Individuums-Konstante wie 'a', je nach Kontext, je nach Beispiel, mal dieses und mal jenes Individuum bezeichnet (genauer schreibe ich darüber im Punkt 0-1-3).

4-3 INDIVIDUEN-VARIABLEN

1) *Formale, logische Sprache*

Beginnen wir wieder mit der Logik-Sprache: Als *Individuen-Variable* gelten ‚x', ‚y' usw. (jeweils ohne Index). Eine Struktur wie ‚Fx' wird in der Logik normalerweise als *offener Satz* oder *Satzform* (bzw. Satzfunktion, Aussageform) interpretiert, die weder wahr noch falsch genannt werden kann. Eine solche Satzform kann durch 2 Arten in einen echten Satz überführt werden:

erstens, man *bindet* die Variable ‚x' durch Quantoren, z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

zweitens, man *ersetzt* die Variable durch eine Konstante, z. B. ‚x' durch ‚x_1',: Fx_1

Wie ich allerdings aufgewiesen habe, erfordert auch ‚x_1' noch eine *Interpretation*, damit man von einem Satz sprechen kann, der wahr oder falsch ist. Es sei denn, man bewegt sich in einer Sprache, wo ‚x_1' eine bekannte und bestimmte Bedeutung besitzt.

Aber wie definiert man ‚x'? Man kann *syntaktisch* festlegen, dass für ‚x' eine *Individuen-Konstante* eingesetzt wird, z. B. ‚x_1' oder ‚x_2', wodurch dann z. B. aus der *Satzform* ‚Fx' der *Satz* ‚Fx_1' entsteht. Aber dass ‚x' quasi nur als Leerstelle fungiert, ist keine echte, semantisch ausreichende Erklärung. Es muss ein *Definitionsbereich* (oder Individuenbereich) für ‚x' angegeben werden, aus dem dann Konstanten auszuwählen sind. Anders gesagt, ‚x' ist als *Zusammenfassung* von Konstanten zu bestimmen.

Nun könnte ich hier im Wesentlichen das wiederholen, was ich zur Definition der Individuen-*Konstante* (z. B. ‚x_1') gesagt habe. Denn wie erläutert, gibt es in der formalen Sprache gar keine echten Konstanten, die sogenannten Konstanten sind letztlich auch Variablen (oder Unbekannte). Dennoch will ich bei der Bestimmung der Individuen-*Variable* noch einige neue Aspekte hinzufügen. Wenn man eine Variable als Zusammenfassung von Konstanten deutet, so muss unterschieden werden, ob diese Zusammenfassung *konjunktiv* oder *disjunktiv* zu verstehen ist.

- *konjunktiv*: z. B. $x = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$

Man könnte darüber diskutieren, ob es zulässig ist, die Konjunktion $\wedge$ bei *Objekten* wie x_1, x_2 usw. zu verwenden oder nur bei *Relationen/Sätzen* wie Fx_1, Fx_2 usw., für die sie eigentlich definiert ist (darauf gehe ich an späterer Stelle ein). Man kann diesem Problem entgehen, indem man formuliert: ‚$Fx \leftrightarrow Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge Fx_3$'. Diese konjunktive Form kann aber hier kaum gemeint sein. Nehmen wir als Beispiel ‚Fx' für ‚x ist Philosoph'. Es muss hier reichen, nur *eine* Konstante einzusetzen, z. B. nur ‚Sokrates' einzusetzen, denn meint man nur jeweils diese *eine* Objekt (Person). ‚$Fx \leftrightarrow Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge Fx_3$' ist aber nur wahr, wenn die Eigenschaft F für alle drei Konstanten wahr ist, also z. B. für Sokrates und Platon und Aristoteles gilt. Das Problem verschärft sich noch, wenn man ‚x' *allgemein* bestimmt als: $x = x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$.

• *disjunktiv*: z. B. $x = x_1 \vee x_2 \vee x_3$
‚x' muss also als *Disjunktion* der Konstanten dargestellt werden, die eingesetzt werden können. Um das o. g. Problem zu vermeiden, schreiben wir statt generell ‚$x = x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$' besser ‚$Fx \leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee ... \vee Fx_n$', wenn wir n Glieder zulassen wollen. Falls wir einen *unendlichen* Definitionsbereich annehmen, schreiben wir ‚$Fx \leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee ...$ (ohne Endglied). Wir könnten natürlich auch einen enger limitierten Definitionsbereich nehmen, z. B. $Fx \leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee Fx_3$. Dies ist allerdings auch die Definition, die wir oben für die Individuen-Konstante x_i genommen haben, was wiederum das Problem der Abgrenzung von Konstanten und Variablen zeigt).

Wie sich im Kapitel über Quantoren-Logik aber noch zeigen wird, gilt:

$$Vx(Fx) \Leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee ... \vee Fx_n$$

Somit würde gelten: $Fx \Leftrightarrow Vx(Fx)$. Und $Vx(Fx)$ bedeutet: ‚Es gibt mindestens ein x, für das gilt: es hat die Eigenschaft F'. Dies ist aber ein *Satz*, der durchaus wahr oder falsch sein kann. Insofern ist die Gleichsetzung $Fx \Leftrightarrow Vx(Fx)$ sehr problematisch, oder man müsste Fx anders interpretieren als bisher.

Außerdem ergibt sich ein weiteres Problem: $Fx_1 \vee Fx_2 \vee ... \vee Fx_n$ ist nur wahr, wenn wenigstens *eine* Einsetzung (*eine* Konstante) wahr ist. Ist das aber bei einer Variablen verlangt? Oder kann es auch sein, dass es für eine Satzform keine Konstante gibt, welche die Satzform zu einem wahren Satz macht?

Fazit: Es ist offensichtlich schwierig, eine klare *semantische* bzw. *logische* Definition einer Variablen zu finden. Die beste Lösung ist doch die *Disjunktion von Konstanten* (wobei man den Definitionsbereich ja nach Bedarf limitieren kann). Wenn einem die genannten Probleme hierbei zu bedenklich scheinen, muss man sich notfalls doch mit der *syntaktischen* Definition der „Leerstelle" zufrieden geben, jedenfalls, bis eine bessere Alternative gefunden ist.

2) *Normale Sprache*
Die Frage ist nun, was sich daraus für die *normale Sprache* ergibt. Wie ist die Individuen-Variable ‚x' normal-sprachlich zu verstehen? Generell ist 'x' hier zu übersetzen als *‚Objekt'* (‚Ding', ‚Gegenstand') o. ä. Dabei ist folgendes zu bedenken: In der normalen Sprache werden Individuen- und Klassen-Zeichen anders gehandhabt als in der logischen Sprache. In der formalen Sprache hat man die Individuen-Variable ‚x', auf die ein *Quantor* (z. B ‚Λ') angewandt wird und der dann *Prädikatoren* (Eigenschafts- oder Klassen-Ausdrücke wie ‚F') zugeordnet werden, z. B. $\Lambda x(Fx)$.

In der normalen Sprache werden aber Klassen-Ausdrücke (bzw. Eigenschafts-Ausdrücke) selbst *quantifiziert*, dabei jedoch *individualisiert*. Diesen Klassen-Ausdrücken werden andere Klassen-Ausdrücke zugeordnet. Z. B. ‚Alle Menschen sind sterblich'. Der Quantor „alle" richtet sich hier auf den Klassenausdruck ‚Mensch'. Dann wird ‚Mensch' der Eigenschafts-Ausdruck ‚sterblich' zugeordnet. In diesem Zusammenhang ist es auch keineswegs trivial, ob ‚Objekt' als Individuums-Zeichen oder Klassen-Zeichen zu verstehen ist (vgl. unten).

Dennoch will ich hier für ‚x' ‚Objekt' einsetzen, weil das noch am ehesten der formalen Sprache entspricht; allerdings sind dabei folgende Möglichkeiten zu unterscheiden:

x = Objekt
x = das (dieses) Objekt
x = irgendein Objekt

• x = Objekt
Hier wird nur ‚Objekt' eingesetzt, ohne Zusätze. Als *Satzform* ergibt sich z. B.: ‚Objekt ist Mensch'. Diese Satzform ist, wie gefordert, weder wahr noch falsch, allerdings ist sie auch kein grammatikalisch korrekter Satz, von daher ist ihre Verwendung in der normalen Sprache fragwürdig. Die Satzform ‚Objekt ist Mensch' wird z. B. durch Einsetzen des Eigennamens

‚Sokrates' in eine wahre Aussage überführt. Oder durch Quantifizierung wird die Variable ‚Objekt' gebunden. Z. B. ergibt sich: ‚alle Objekte' bzw. ‚für alle Objekte gilt ...'.

- x = das Objekt

Hier ergibt sich als Satzform z. B. ‚das Objekt ist Mensch'. ‚x' soll dabei normal-sprachlich also ‚das Objekt' (oder ‚dieses Objekt') entsprechen. ‚x ist Mensch' entspricht dann ‚das Objekt ist Mensch'. In der Tat kann man dem Satz ‚das Objekt ist Mensch' keinen Wahrheitswert zuordnen, er ist unbestimmt.

Meines Erachtens ist aber die Interpretation von ‚x' als ‚das Objekt' problematisch: denn ‚das' verweist (als definiter Artikel) gerade im Gegensatz zur *unbestimmten* Variable auf etwas *Bestimmtes,* so dass ‚das Objekt ist Mensch' – wenn nicht in einem speziellen Kontext gebraucht – einfach *grammatisch falsch* ist.

- x = irgendein Objekt

Bliebe die Möglichkeit, ‚x' normal-sprachlich zu interpretieren als *irgendein* Objekt, d. h. irgendein beliebiges Objekt aus der Klasse aller Dinge (Allklasse: $x = x_1, x_2, \dots , x_n$). Man kann natürlich den *Individuenbereich*, den Bereich der Dinge, aus dem x stammen kann, auch irgendwie einschränken ist, z. B. durch $x = x_1, x_2, x_3$. Für ‚x ist Mensch' ergibt sich dann im Beispiel ‚irgendein Objekt ist Mensch', und dies ist durchaus ein *Satz* und kann wahr oder falsch sein. Hier ergibt sich aber wieder das schon oben angesprochene Problem: ‚Irgendein Objekt ist Mensch', kann man wohl als gleichbedeutend ansehen mit ‚es gibt (mindestens) ein Objekt, das Mensch ist'. Das notiert man aber mit Hilfe des sogenannten *Existenz-Quantors*: ‚Vx(x $\in$ Mensch)'. Hier wäre also die Variable ‚x' automatisch eine *gebundene* Variable, was nicht sinnvoll ist.

Damit ergibt sich als beste Lösung doch: Man übersetzt die logische Individuen-Variable ‚x' normalsprachlich mit ‚Objekt', es sei denn, man benutzt einfach das ‚x' aus der Logik-Sprache. Zwar gibt es in der normalen Sprache auch andere Zeichenklassen, die als Variablen fungieren können, vor allem die *Pronomen* wie z. B. ‚er' oder ‚dieser'; sie eignen sich aber nicht für eine allgemeine Theorie der Variablen (lassen sich z. B. auch nicht quantifizieren).

Fassen wir die Aussagen über *Individuen-Konstanten* und *Individuen-Variablen* noch mal (mit Beispielen) zusammen:

1. <u>*normal-sprachlich*</u>
   - *Konstanten*: ‚Sokrates', ‚Platon'
     konstanter Satz: ‚Sokrates ist Philosoph'
   - *Variablen*: ‚Objekt' (der Status von Individuen-Variablen ist hier problematisch)
     variabler Satz: ‚Objekt ist Philosoph'
     ggf. ‚Sokrates oder Platon oder Aristoteles oder anderes Objekt ist Philosoph'

2. <u>logik-sprachlich</u>
   - *Konstanten*: ‚x_1, x_2, x_3' usw., allgemein ‚x_i' bzw. ‚y_i' (keine echten Konstanten)
     konstanter Satz: ‚x_1 ist Philosoph'
   - *Variablen*: ‚x', ‚y'
     variabler Satz: *ungebundene* Variable: 'x ist Philosoph' (Satzform)
     variabler Satz: *gebundene* Variable: z. B. ‚Vx(x ist Philosoph)'

4-4 KLASSEN-ZEICHEN BZW. EIGENSCHAFTS-ZEICHEN

Ich erspare mir, nach der obigen Analyse von *Individuen*-Variablen und -Konstanten entsprechende Überlegungen noch einmal im Detail für *Klassen*-Variablen und -Konstanten anzustellen, da dies zu vielen Wiederholungen führen würde. Allerdings muss ich auf folgende besondere Probleme hinweisen. Dabei gehe ich zunächst von der *normalen* Sprache aus. Es stellen sich vor allem zwei Fragen, anhand des Beispiels ‚Mensch':

1) Frage: Ist ‚Mensch' ein *Individuums*- oder ein *Klassen*-Zeichen?
Diese Frage scheint leicht zu beantworten. ‚Mensch' ist ein *Klassen-Zeichen* (bzw. Eigenschafts-Zeichen), denn ‚Mensch' bezeichnet die Klasse der Menschen (oder die Eigenschaft „Mensch"). Aber man kann ‚Mensch' quasi wie eine *Individuums*-Variable verwenden. ‚Mensch ist sterblich' sei die *Satzfunktion*. Durch Einsetzen von z. B. ‚Platon' erhalte ich den wahren Satz: ‚Platon ist sterblich'. Andererseits kann man auch durch Quantifizierung von ‚Mensch' einen Satz erzeugen: ‚Für alle Menschen gilt: sie sind sterblich'.

Dies kann man alles in der *formalen Sprache* nicht machen. Man kann einen Klassenausdruck wie ‚F' (entsprechend ‚Mensch') zwar quantifizieren, aber nicht in dem Sinne: ‚für alle F gilt'.

Dennoch will ich daran festhalten, dass ‚Mensch' und andere vergleichbare Wörter *Klassen-Ausdrücke* sind, nur geht die normale Sprache damit syntaktisch anders um als die formale logische Sprache. Man kann in der normalen Sprache ein Zeichen wie ‚Mensch' nicht nur auf die Klasse als Ganze anwenden, sondern auch auf die Individuen, die Elemente der Klasse sind. Ein Wort wie ‚Mensch' in der normalen Sprache ist vielfältiger, flexibler verwendbar als ein Prädikator 'F' in der logischen Sprache, mit Vorteilen und Nachteilen. Fazit: ‚Mensch' ist ein Klassen-Zeichen, das aber auch als Individuen-Zeichen verwendet werden kann.

2) Frage: Ist ‚Mensch' eine *Konstante* oder eine *Variable*?
Auch hier scheint die Antwort zunächst klar: Z. B. in der *Satzform* ‚x ist ein Mensch' ist ‚x' eine Variable und ‚Mensch' eine Konstante. Aber ich schon oben gezeigt habe: man kann ‚Mensch' auch wie eine Variable verwenden, denn ich kann ‚Mensch' ja auf ganz unterschiedliche Individuen anwenden, auf Sokrates, Platon usw. Das gilt offensichtlich generell in der normalen Sprache. Von daher hatte ich auch das sehr allgemeine Wort ‚Objekt' als Variable eingeführt. Und so kann man fragen, ob es in der normalen Sprache überhaupt echte, eindeutige Konstanten gibt.

Zunächst kann man darauf hinweisen: Es gibt Zeichen *unterschiedlicher Bestimmtheit*, z. B. das Wort ‚Lebewesen' hat weniger Merkmale (kleinere Intension) als der Begriff ‚Pflanze', bezieht sich aber in der Wirklichkeit auf mehr Objekte (größere Extension). So gesehen ist ‚Lebewesen' in größerem Ausmaß eine Variable als ‚Pflanze', denn es ist vieldeutiger. So könnte man eine *Kette unterschiedlicher Variabilität* aufstellen, z. B. ergibt sich folgende Reihenfolge: Lebewesen – Pflanze – Blume – Rose. ‚Lebewesen' ist unbestimmter als ‚Pflanze' usw.

Aber dass z. B. ‚Lebewesen' sich als Variable ansehen lässt, muss man nicht semantisch durch die Vielzahl der bezeichneten Individuen begründen, sondern man kann auch *syntaktisch* auf andere Variablen verweisen. Für ‚Lebewesen' könnte man z. B. einsetzen ‚Pflanze' oder ‚Tier'. Dann wäre ‚Lebewesen ist sterblich' ein Satz mit einer Variablen und müsste überführt werden in ‚Pflanze ist sterblich' oder ‚Tier ist sterblich'; aber ‚Pflanze' und ‚Tier' könnten ja wiederum als Variablen gelten. Im Prinzip wären das also alles Variablen. Aber stimmt das wirklich? Kann man z. B. ‚Mensch' wirklich als Variable bezeichnen?

Hier gibt es folgendes zu unterscheiden:' Mensch' bezeichnet zum einen die *Klasse* aller Menschen ($\text{Mensch}_1 \cup \text{Mensch}_2 \cup ... \cup \text{Mensch}_n$). Auch wenn ‚Mensch' hier viele Objekte bezeichnet, es bezeichnet sie *insgesamt*, gleichzeitig, nicht alternativ und ist daher eine Konstante, eben eine *Klassen-Konstante;* denn die kann ja nicht nur *ein* Objekt bezeichnen, sie bezeichnet die ganze Klasse. Und wenn man einwendet, dass für ‚Mensch' z. B, ‚Mann' oder ‚Frau' einsetzt werden kann, so sind Männer und Frauen eben *Teilmengen* der Klasse der Menschen.

Andererseits kann ‚Mensch' (bzw. ‚dieser Mensch') auch alternativ, *wechselnd* mal diesen oder mal jenen individuellen Menschen bezeichnen. Es hat hier die Funktion einer Variablen, aber einer *Individuums-Variablen*, nicht einer Klassen-Variablen. ‚Mensch' bezeichnet nicht unterschiedliche Klassen, es kann nicht z. B. die Klasse der Pflanzen oder die Klasse der Hunde bezeichnen.

Man kann es vielleicht so zusammenfassen: ‚Mensch' kann einmal als *Konstante* fungieren und einmal als *Variable*. Und das gilt offensichtlich generell in der normalen (deutschen) Sprache, es gilt z. B. auch für ‚Objekt'. Wahrscheinlich sollte man aber folgendermaßen betonen: ‚Mensch' ist primär eine Konstante, kann aber auch als Variable verwendet werden.

Wie ist das in der *formalen* Sprache? Hier ist das anders, weil man immer zunächst die Individuen-Variable ‚x' einführt. Ein Klassen-Zeichen wie ‚F' (entsprechend ‚Mensch') kann nie ein einzelnes Individuum bezeichnen, sondern dies geht nur über Individuums-Konstanten.

Ich verwende als Klassen-Zeichen (bzw. Eigenschafts-Zeichen) vorwiegend ‚F' und ‚G'. Ich verstehe sie zunächst als *Variablen*. Aber sollten sie in einem Kontext als *Konstanten* verstanden werden, will ich dies nicht durch zusätzliche Indizes wie in ‚F_i'oder ‚F_j' verkomplizieren. Auch ‚F_1'oder ‚F_2' sind offen für beide Interpretationen, als Konstanten und Variablen. Ggf. kann man Zeichen wie ‚Mn' (mit der Bedeutung ‚Mensch') verwenden, wenn es notwendig sein sollte, sie als Konstanten auszuweisen.

4-5 ABSCHLUSS

Es ist wohl folgendes deutlich geworden:

1) Obwohl man sich gerade in der formalen *logischen* Sprache Präzision wünschen würde, gibt es hier einen – schwammigen – Übergang von Konstanten zu Variablen. Präzision wird nur durch die Formalisierung vorgetäuscht. In der normalen Sprache sind die Verhältnisse wohl noch komplizierter. Die Eigennamen sind zwar als Konstanten klarer bestimmt als die Individuen-Konstanten in der Logik, aber im Bereich der Klassen-Zeichen herrscht in der normalen Sprache eine *Multifunktionalität*. Eine wirklich präzise Fassung von Konstanten versus Variablen steht noch aus.

2) In jedem Fall geht es bei einer Neufassung mehr um eine Relativierung des Unterschiedes von Konstante und Variable, zugunsten einer *quantitativen* Theorie der *Bestimmtheit* (vgl. unten). Ist ein Objekt bzw. ein Zeichen *total bestimmt* (reine Konstante) oder wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? Bei *unendlichen vielen* Möglichkeiten ist es *absolut variabel*. Allerdings geht es dabei um die *wechselnde* Verwendung, eine Klassen-Konstante bezeichnet die Klasse als Ganze – mit vielen Elementen –, sie bleibt dennoch eine Konstante.

3) Es ist aber für die Logik gar nicht so wesentlich, ob man mit Konstanten oder mit Variablen als *deskriptiven* Zeichen arbeitet, Konstanten sind im Wesentlichen verzichtbar. Letztlich kann die *formale* logische Sprache prinzipiell keine echten Konstanten besitzen, weil sie eben formal ist und nicht inhaltlich bestimmt. Die *Unterscheidbarkeit* ist wichtig, ich muss nicht wissen, welche Bedeutung ‚x_1' und ‚x_2' haben, es reicht, dass ich sie unterscheiden kann.

4) Generell kann man den Unterschied zwischen Konstanten und Variablen vor allem anhand von drei Begriffen definieren: *Quantität*, *Konstanz*, *Bestimmtheit* – dabei ist Quantität das primäre. Es geht jeweils um die *Bedeutung*, also z. B. bei Quantität um einheitliche oder vielfältige Bedeutung.

	Konstante	*Variable*
Quantität	einheitlich	vielfältig
Konstanz	gleich	wechselnd
Bestimmtheit	bestimmt	unbestimmt

Eine *quantitative Formel* von Konstanz bzw. Variabilität könnte folgendermaßen aussehen:

p(Konstanz) = 1/n.

Dabei ist n die *Anzahl von Bedeutungen*, für die das Zeichen alternativ/wechselnd stehen kann. Nur bei p(Konstanz) = 1 liegt im strengen Sinn eine *Konstante* vor.

Veranschaulichen wir uns das an der Individuen-Variablen ‚x':

Variable	Bedeutung	p(Konstanz)
‚x'	x_1	1/1 = 1
	x_1, x_2	1/2 = 0,5
	x_1, x_2, x_3	1/3 = 0, 33
	x_1, x_2, x_3, x_4	1/4 = 0,25
	....	
	$x_1, x_2, \ldots, x_n$	1/n
	$x_1, x_2, \ldots$	$1/\infty \approx 0$ (oder: $1/\infty = 0$)

Im Buch „Integrale Logik" wird ähnlich ein *quantitativer Bestimmtheits-Wert* eingeführt.

5 Relationen

5-1 LOGISCHE RELATIONEN

Relationen sind neben *Objekten* (bzw. Eigenschaften) die zweite Basiskomponente der Logik. Relationen sind Beziehungen, Verhältnisse zwischen zwei oder mehr Entitäten.
Nachfolgend in Kürze bzw. als Wiederholung Wesentliches über logische Relationen:

• *Extensionale und intensionale Relationen*

– *extensional*:
 atomar: Relationen zwischen *Objekten*, also zwischen Individuen, Mengen/Klassen
 molekular: Relationen zwischen *Objekt-Relationen*

– *intensional*:
 atomar: Relationen zwischen *Eigenschaften*
 molekular: Relationen zwischen *Eigenschafts-Relationen*

– *gemischt extensional-intensional*:
 atomar: Relationen zwischen Objekten und Eigenschaften
 molekular: Relationen zwischen *gemischten Relationen*

• *Relationen versus Objekte*: Relationen sind einerseits klar von *Objekten* zu trennen. Relationen bzw. Strukturen, z. B. Aussagen, sind wahr oder falsch, von Objekten kann man dagegen nicht sagen, sie sind wahr oder falsch (jedenfalls nach üblicher Deutung). Andererseits haben wir gesehen: Ein Objekt ist ein Träger, der bestimmte Eigenschaften „trägt". D. h. aber nichts anderes, als dass der *Träger in Relation zu diesen Eigenschaften* steht. Insofern geht der Begriff der Relation also schon in die Definition des Objekts ein. Nur wenn man von *formalen* Objekten ausgeht, sind diese ohne direkten Rückgriff auf Relationen zu fassen.

Die gleiche Thematik hatte man schon bei Objekten und Eigenschaften. *Inhaltlich* bestimmte Objekte enthalten bereits Eigenschaften, nur *formale* Objekte sind frei von Eigenschaften.

Dass sich hier – bei inhaltlicher Deutung – gewisse Überschneidungen zwischen den Grundbegriffen ergeben, sehe ich aber nicht als echtes Problem. Es verweist darauf, dass es sich bei Objekten, Eigenschaften und Relationen um Komponenten eines *Systems* handelt.

• *Ebene der Relation*: sprachlich = Aussage/Satz, psychisch = Urteil, real = Sachverhalt. Logische Relationen enthalten aber in keinem Fall *räumliche*, *zeitliche*, *kausale* oder andere reale Komponenten. So besteht bei der *Implikation* $X \rightarrow Y$ oder dem *Schluss* $\Phi \Rightarrow \Psi$ *keine zeitliche Folge*. Sondern es geht bei ihnen nur um (quantitatives) *Enthaltensein*, *gemeinsames Auftreten, funktionale Abhängigkeiten* o. ä. Das wird noch genauer erläutert werden.

• *Logische und hyper-logische Relationen*
– *Hyper-logische* Relationen sind z. B. *kausale* Wirkung, *räumliche* Nähe, *zeitliche* Folge, *Zielgerichtetheit* usw.
– *Logische Relationen* liegen *hyper-logischen* (über-logischen) Relationen wie z. B. *Kausalität* zugrunde. Das heißt, die kausalen Ursache-Wirkungs-Relation hat eine logische Struktur, es kommen aber noch andere Komponenten hinzu, etwa der Faktor Zeit – die Ursache geht der Wirkung zeitlich voraus.

Dennoch muss man logische Relationen nicht auf *abstrakte* Objekte beziehen, logische Relationen bestehen sehr wohl auch zwischen raum-zeitlichen Objekten.

• *Definition einer Relation*
Man kann für eine *logische Relation* schreiben:

X R Y. Soll heißen: X steht zu Y in Relation.
Alternative Schreibweise: R(X,Y)

Will man auf eine *bestimmte* Relation verweisen, kann man schreiben: $R_i(X,Y)$

Nehmen wir als Beispiel die Relation $X \rightarrow Y$.
Genauer kann man unterscheiden:

$X \rightarrow Y$	*Relationssystem* bzw. *Struktur* (das Ganze)
X, Y	*Relata*
$\rightarrow$	*Relation* (die Beziehung)
‚$\rightarrow$’	*Relator* (das Zeichen)

Noch allgemeiner wäre zu schreiben $R(\Phi,\Psi)$, wobei Φ und Ψ für beliebige Entitäten stehen können (vgl. später).

Der Terminus ‘*Relationssystem’* (oder ‚*Relationsgefüge’*) ist recht sperrig. Ich nutze daher vorwiegend zwei Alternativen:
- Wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind, verwende ich ‘Relation’ auch für $X \rightarrow Y$ und nicht nur für die *eigentliche* Relation $\rightarrow$.
- Oder ich verwende (wie gesagt) für das Relationssystem $X \rightarrow Y$ den Terminus ‘Struktur’.

• *Subjekt und Prädikat*: Herkömmlich unterscheidet man in einem Satz zwischen *Subjekt* und *Prädikat*. Man könnte diese Unterscheidung auch auf eine Relation beziehen. Nur ist diese Unterscheidung primär eine *pragmatische*: man wählt eine Entität als diejenige aus, *über die* man etwas aussagt (Subjekt), indem man ihr etwas anderes zuordnet (Prädikat).

Aber in einer Relation X R Y ist es logisch gesehen nicht von Relevanz, welches Relat man als Subjekt oder Prädikat auswählt. Es ist logisch gleichgültig, ob man z. B. formuliert:

„X ist Vorfahre von Y“ (X = Subjekt) Oder: „Y ist Nachfahre von X“ (Y = Subjekt).

Es liegt dieselbe Relation zugrunde. Es recht gilt das bei primär logischen Strukturen wie „$X \rightarrow Y$“. Diese ist logisch äquivalent mit „$Y \leftarrow X$“.

5-2 RELATOREN

Logische Relationen werden formal durch *Relatoren* ausgedrückt. Es gibt Relatoren der *Prädikaten-Logik* wie ‚$\in$', der *Klassen-Logik* wie ‚$\subset$', am wichtigsten sind aber die Relationen der *Aussagen-Logik*. Bei 2 Aussagen X, Y sind 16 Relatoren bzw. Relationen gegeben. Sinnvoller ist allerdings, von der Zahl 14 (für synthetische Relationen) auszugehen, wie noch zu zeigen sein wird. Die vollständige Liste aller Relatoren wird später gebracht.

Die wichtigsten Relatoren sind:

• Konjunktion	und	formal: $\wedge$	$X \wedge Y$
• Disjunktion	oder (inklusiv)	formal: $\vee$	$X \vee Y$
• Kontravalenz	oder (exklusiv)	formal: ><	X >< Y
• Exklusion	oder (nicht beide)	formal: |	X | Y
• Implikation	wenn – dann	formal: $\rightarrow$	$X \rightarrow Y$
• Äquivalenz	nur wenn – dann	formal $\leftrightarrow$	$X \leftrightarrow Y$

Ich unterscheide dabei 3 *oder*-Relationen:

• *Disjunktion* (*subkonträrer* Gegensatz)
Die Disjunktion $X \vee Y$ schließt – als Möglichkeit – ein, dass X und Y beide positiv sind. Die Disjunktion ist deshalb *inklusiv*.

• *Kontravalenz* (*kontradiktorischer* Gegensatz)
Die Kontravalenz X >< Y meint „entweder – oder": nicht beides und nicht beides nicht. Sie schließt also aus, dass X und Y positiv sind, ich bezeichne sie daher als *exklusiv*. Als Symbol für die Kontravalenz nehme ich das ><, quasi ein umgekehrtes Äquivalenz-Zeichen $\leftrightarrow$ (denn die Kontravalenz ist die Umkehrung der Äquivalenz).

• *Exklusion* (*konträrer* Gegensatz)
Es gibt einen dritten Relator, den man auch zuweilen mit „oder" übersetzt. Dieses „oder" schließt nur aus, dass X und Y beides gilt. Als Symbol dient der „Sheffer Strich": X | Y. Man nennt ihn meistens „*Exklusor*" und die dazu gehörige Relation „Exklusion". Diese Bezeichnung ist leider sehr unglücklich, denn unter exklusivem „oder" versteht man üblicherweise die Kontravalenz, und die Parallele zwischen inklusiver Disjunktion und exklusiver Kontravalenz spielt eine große Rolle. Um nicht von der allgemeinen Terminologie abzuweichen, bleibe ich zwar bei dem Terminus „Exklusion", bezeichne aber dennoch die Kontravalenz als „exklusives oder".

Eine Sonderrolle spielt die *Negation* mit dem Negator $\neg$. Dadurch wird eine *positive* Relation (ein wahrer Satz) X in eine *negative* Relation (einen negierten bzw. falschen Satz) $\neg X$ umgewandelt.

5-3 RELATIONEN UND VERKNÜPFUNGEN

Für die *Implikation* „wenn - dann" ist die Bestimmung als *Relation* unproblematisch. Aber Termini wie „und" (Konjunktion) bzw. „oder" (Disjunktion) sind nicht direkt als Relationen erkennbar.

Von daher ist es verständlich, dass die Logik überwiegend nicht von Relationen ausgeht, sondern von *Verknüpfungen*. Darauf verweist auch der Begriff *Junktor* (von lat. jungere = verbinden), welcher in der Logik überwiegend anstatt ‚Relator' verwendet wird. Denn als Verknüpfungen sind alle logischen Verbindungen, also auch die Implikation, gut zu interpretieren. Und da die moderne Logik sich eben primär auf Aussagen bezieht, geht man von der *Verknüpfung von Aussagen* aus. Aber wo bleiben dann die Relationen?

Angenommen, wir bestimmten die Konjunktion $X \wedge Y$ als *Verknüpfung* und die Implikation $X \rightarrow Y$ als *Relation*. Nun lässt sich aber die Konjunktion $X \wedge Y$ (Verknüpfung) in eine Implikation umformen, nämlich in $\neg(X \rightarrow \neg Y)$, also in eine Relation. Das ist natürlich noch kein Beweis für den Vorrang der Relation, denn umgekehrt kann man auch $X \rightarrow Y$ (Relation) in eine Konjunktion (Verknüpfung) umwandeln, nämlich in $\neg(X \wedge \neg Y)$. Aber es zeigt, dass die Konjunktion und die Implikation logisch auf *einer* Ebene liegen.

Ich halte den Ansatz der *Relation* für sehr viel fundierter. Der Ansatz der Relation wird besser verständlich, wenn man sich klar macht: Bezogen auf Aussagen bedeutet die Konjunktion $X \wedge Y$: „Die Aussagen X und Y sind *zusammen* wahr". Daran wird deutlich, dass ein Verhältnis, also eine Relation zwischen X und Y besteht.

Dennoch mag man informell auch den Begriff der Verknüpfung verwenden, vor allem für komplexe Relationen wie $(X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y)$.

Wenn man aber ganz präzise vorgeht, sollte man unterscheiden:

- *Verknüpfungen*
  Dies sind Verknüpfungen von *Mengen* wie Schnitt-Menge oder Vereinigungs-Menge (bzw. die entsprechenden Operatoren $\cap$ und $\cup$).
  Mengen-Verknüpfungen wie $M \cap N$ oder $M \cup N$ sind wiederum Mengen, sie sind daher *nicht* wahr (positiv) oder falsch (negativ).
- *Relationen*
  Diese betreffen alle „Junktoren" bzw. Relatoren der Logik ($\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ usw.) sowie Relatoren der Mengenlehre ($\subset$, $\supset$, = usw.). Sie sind wahr (positiv) oder falsch (negativ).

5-4 WAHRHEITS-TAFELN

Die Relationen (Relatoren) werden durch *Wahrheitswerte* bzw. eine *Wahrheitswerte-Tafel*, kurz: *Wahrheitstafel*, definiert. Dabei wird von Aussagen ‚A' und ‚B' usw. ausgegangen, die *wahr* (w) oder *falsch* (f) sein können. Ich wähle aber die *neutrale* Form ‚X' und ‚Y'. Und anstatt *w* oder *f* schreibe ich neutral + oder –.

Generell kann man sagen: Eine logische Komponente X bzw. Y ist:

gültig (+) Alternativen: *belegt*, *positiv*
ungültig (–) Alternativen: *nicht belegt*, *negativ*

Ich schränke den Begriff ‚gültig' / ‚ungültig' also nicht auf logische Schlüsse bzw. *logische, analytische* Wahrheit ein, wie dies sonst oft geschieht.

In der Wahrheitstafel werden die *möglichen Welten* angegeben. Bei 2 Relata (bzw. 2 Aussagen oder 2 Variablen) X und Y ergeben sich $2^2 = 4$ *mögliche Welten* oder *logische Welten*: D. h. es wird angeben, welche *Kombinationsmöglichkeiten* von X und Y es gibt:

$$X \wedge Y,\ X \wedge \neg Y,\ \neg X \wedge Y,\ \neg X \wedge \neg Y$$

Dann wird angegeben, bei welchen dieser Möglichkeiten, in welcher dieser Welten, der betreffende Relator (bzw. die Relation) als gültig gilt.

Für die Implikation $X \rightarrow Y$ ergibt sich folgende Wahrheitstafel:

X	→	Y
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	+	–

Eine alternative Form der Wahrheitstafel sieht folgendermaßen aus:

X	Y	$\to$
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	–	+

Die wichtigste Deutung der Wahrheitstafel ist: Man schließt von X und Y auf $X \to Y$. Also z. B.: Wenn X, Y gültig sind (X+, Y+), dann ist auch $X \to Y$ bzw. $\to$ gültig (+) usw.

Aber insgesamt sind folgende Deutungen der Wahrheitstafel möglich:

- Man schließt von X,Y auf $X \to Y$
- Man schließt von X auf $X \to Y$
- Man schließt von Y auf $X \to Y$
- Man schließt von $X \to Y$ auf X,Y
- Man schließt von $X \to Y$ auf X
- Man schließt von $X \to Y$ auf Y

$X \to Y$ ist also in 3 Welten belegt bzw. wahr. Diese Welten sind hier durch folgende Parameter gekennzeichnet $X \wedge Y$, $\neg X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$. Das darf man nun nicht so verstehen, dass diese drei (bzw. sogar alle vier) Welten nebeneinander bestehen. Nur *eine* Welt ist *real*, die anderen drei sind zwar theoretisch möglich, aber *irreal*. Es ist unmöglich, das auch nur 2 dieser Welten nebeneinander bestehen, denn sie sind alle zueinander *kontradiktorisch*.

Z. B. ist die *Kombination*, also die *Konjunktion* $(X \wedge Y) \wedge (X \wedge \neg Y)$ kontradiktorisch, und das gilt auch für alle anderen Kombinationen; wenn man nur die *2er*-Kombinationen berücksichtigt, dann gibt es 7 Kombinationen, diese stehen alle für *unmögliche* Welten.

Denkbar ist nur, dass man den *Geltungsbereich* der verschiedenen Welten einschränkt, vor allem:

- *zeitlich*: zum *jetzigen Zeitpunkt* gilt die Kombination Φ (z. B. $X \wedge Y$), aber zu einem *anderen Zeitpunkt* gilt die Kombination Ψ (z. B. $\neg X \wedge \neg Y$). Diese zeitliche Einschränkung bzw. Differenzierung ist die wichtigste.
- *räumlich*: an einem *Ort* (z. B. dem Ort o_i) gilt die Kombination Φ, aber an einem anderen Ort (z. B. dem Ort o_j) gilt die Kombination Ψ.
- *konditional*: unter der einen *Bedingung* gilt die Kombination Φ, aber unter einer anderen Bedingung gilt die Kombination Ψ.

Als wichtigste Relationen hatte ich genannt: $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X >< Y$, X / Y, $X \to Y$, $X \leftrightarrow Y$

Die *Wahrheitswertetafeln* für die entsprechenden Relatoren sind:

X	Y	$\wedge$	$\vee$	$><$	/	$\to$	$\leftrightarrow$
+	+	+	+	–	–	+	+
+	–	–	+	+	+	–	–
–	+	–	+	+	+	+	–
–	–	–	–	–	+	+	+

5-5 POSITIV-IMPLIKATION

Die Implikation wirft verschiedene Probleme auf, sie führt zu *paradoxen* Ergebnissen und sie entspricht auch nicht unserem *normalen Sprachgebrauch.*

Gehen wir von folgendem einfachen Beispiel aus:
„Wenn es regnet, ist die Strasse nass“. Mit dem Implikations-Pfeil $\rightarrow$ geschrieben:
„Es regnet $\rightarrow$ Die Strasse ist nass“

Es regnet	$\rightarrow$	Die Strasse ist nass
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	+	–

Die Implikation $X \rightarrow Y$ ist also auch gültig (+), wenn das Vorderglied X ungültig (–) ist. Danach ist die Beispiel-Relation auch gültig, wenn es nicht regnet, egal, ob die Strasse nass ist oder nicht. Konkret, die Gesamtstruktur „Es regnet $\rightarrow$ Die Strasse ist nass“ könnte sogar gültig sein, wenn es niemals regnet und die Strasse immer trocken bleibt. Das entspricht sicher nicht der Bedeutung des Satzes, wie wir ihn in *normaler Sprache* verwenden.

Aber unabhängig von diesem Beispiel, die Definition der Implikation $X \rightarrow Y$ entspricht *generell* nicht der Deutung von *Wenn-dann-Sätzen* in der normalen Sprache. Denn die *normal-sprachliche* Implikation gilt nicht als wahr, wenn der Vordersatz (X) falsch ist. Um normal-sprachliche Strukturen (Sätze) zu formalisieren, bietet sich daher eine andere Implikation an.

Doch die Implikation ist nicht nur problematisch im Hinblick auf die *normale Sprache*, sondern sie führt auch *innerhalb der Logik* zu *Paradoxien*, wenn man sie als *Folge-Beziehung* interpretiert). Dies gilt für *synthetische* Implikationen wie $X \rightarrow Y$ und für *analytische* Implikationen (Schlüsse) wie $X \Rightarrow X$. Da aus einem *falschen* Vorder-Satz die Wahrheit des Gesamt-Satzes folgt, kann man $\neg X \Rightarrow (X \rightarrow Y)$ schreiben. Wenn nun der Vorder-Satz nicht nur einfach ein falscher Satz ist, sondern ein *kontradiktorischer*, d. h. *logisch falscher* Satz, dann kann man aus diesem Satz *jeden beliebigen anderen Satz* logisch ableiten, wie später noch genau gezeigt werden soll. Man kann aus einem Satz sogar sein *eigenes Gegenteil* logisch ableiten, z. B. $(X \wedge \neg X) \Rightarrow \neg(X \wedge \neg X)$. Dies ist nicht gerade erwünscht in der Logik. Man könnte daher fordern, dass ein Schluss aus einem *falschen* oder sogar *kontradiktorischen* Vorder-Satz „verboten“ sei, so wie in der Mathematik z. B. die *Division durch die Zahl 0* verboten ist, weil sie zu paradoxen Ergebnissen führt.

Da aber eine Implikation, die für *alle* Welten definiert ist – einschließlich derjenigen, in den der Vorder-Satz falsch ist – auch Vorteile hat, ist es sinnvoller, man *ergänzt* die normale Implikation durch eine andere Implikation, in der die geschilderte Problematik nicht auftritt.

Positiv-Implikation

Ich nenne diese andere Implikation ‚*Positiv-Implikation'* und verwende das *Symbol* $*\!\rightarrow$, für die *Gesamt-Relation* $X *\!\rightarrow Y$. Es wird also der Pfeil $\rightarrow$ der normalen Implikation genommen und ein Stern * davor gesetzt. Man kann sie auch kurz *Implikation schreiben.

Der Name erklärt sich wie folgt: Die Positiv-Implikation ist nur für die Fälle definiert, in denen das Vorderglied gültig, also *positiv* (+) ist.

Ursprünglich hatte ich das (elegante) Symbol $\lfloor$ für die Positiv-Implikation verwendet, das sich optisch klarer vom $\rightarrow$ unterscheidet. Für die analytische Implikation ergab sich $\lfloor\!\lfloor$, für die Replikation $\rfloor$, für die Äquivalenz $\rfloor\!\lfloor$ usw. Aber da das Symbol $\rightarrow$ in 4 Varianten verwendet wird und zusammen mit Replikation und Äquivalenz sogar in 12, und da für die Positiv-Implikation ebenfalls 12 Varianten zu unterscheiden sind, habe ich ein Symbol bevorzugt, das unmittelbar aus dem bekannten Symbol $\rightarrow$ abzuleiten ist und nicht erst gelernt werden muss.

Die Positiv-Implikation wird in 2 Varianten eingeführt:

1)

X	*→	Y
+	+	+
+	–	–

2)

X	*→	Y
+	+	+
+	–	–
–	□	+
–	□	–

1) *verkürzte* Form
Im ersten Fall werden nur die 2 Welten in der Wahrheitstafel *aufgeführt*, in denen die Positiv-Implikation definiert ist, also in denen das Vorderglied (der Vordersatz) X positiv (+) ist.
2) *vollständige* Form
Im zweiten Fall werden zwar alle 4 Welten genannt, aber in den zwei Welten, in denen der Wenn-Satz falsch ist, bleibt der Wert der Relation *undefiniert* (Symbol □).

Beide Varianten der Positiv-Implikation haben ihre Vorteile, ich verwende sie alternativ, mit dem gleichen Symbol, um nicht unnötig neue Symbole einzuführen. Dazu ein *Beispiel*:

Es regnet	*→	Die Strasse ist nass
+	+	+
+	–	–
–	□	+
–	□	–

Hier zeigt sich also: Wenn der Vordersatz falsch ist, wenn es also nicht regnet, dann ist der Wahrheitswert des Satzes *nicht definiert*, man kann seinen Wahrheitswert nicht angeben.

Generell gilt: Die oben aufgezeigten Paradoxien treten bei der Positiv-Implikation nicht auf, weil ein Schluss von einer *negierten* oder *kontradiktorischen* Prämisse aus *undefiniert* bzw. *unbestimmt* ist, wie noch im Einzelnen gezeigt werden wird.

Beide Implikationen X → Y und X *→ Y haben ihre Bedeutung. Für die *normale Implikation* X → Y spricht: Es ist aus systematischen Gründen sinnvoll, die Implikation in *allen* möglichen (d. h. bei 2 Variablen = 4) Welten zu definieren, und eine andere Deutung der Wahrheitswerte bietet sich auch nicht zwingend an. Nur so lässt sich die Implikation problemlos in andere Junktoren umformen, die auch für 4 Welten definiert sind.

Man kann es auch so ausdrücken: Die normale Implikation X → Y ist, wie alle aussagenlogischen Relatoren, *streng wahrheitswert-funktional*, ihr Wahrheitswert ist eine *vollständige* Funktion der Wahrheitswerte der Teile X und Y. Dagegen ist die Positiv-Implikation nur *eingeschränkt wahrheitswert-funktional*, es wird nur für zwei von vier Welten ein Wahrheitswert für X *→ Y angegeben. Das Verhältnis dieser beiden Implikationen → und *→ wird uns im ganzen Text immer wieder beschäftigen.